Matemaatiline analüüs I
13. praktikum

Lause 7.1. Olgu I intervall ja olgu funktsioon $f : I \to \mathbb{R}$ pidev intervallis I ja diferentseeruv intervalli sisemuses I°. Siis

$$\begin{aligned}
\forall x \in I^\circ\ f'(x) > 0 \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ on rangelt kasvav intervallis } I,\\
\forall x \in I^\circ\ f'(x) \geqslant 0 \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ on kasvav intervallis } I,\\
\forall x \in I^\circ\ f'(x) < 0 \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ on rangelt kahanev intervallis } I,\\
\forall x \in I^\circ\ f'(x) \leqslant 0 \quad &\Longrightarrow \quad f \text{ on kahanev intervallis } I.
\end{aligned}$$

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ja $a \in X^\circ$.

Funktsioonil f on punktis a *range lokaalne maksimum* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \ \ f(x) < f(a).$

Funktsioonil f on punktis a *lokaalne maksimum* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \ \ f(x) \leqslant f(a).$

Funktsioonil f on punktis a *range lokaalne miinimum* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \ \ f(x) > f(a).$

Funktsioonil f on punktis a *lokaalne miinimum* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \ \ f(x) \geqslant f(a).$

Üldnimetus lokaalse maksimumi ja miinimumi jaoks:
lokaalne ekstreemum.

Lause 6.1. (Fermat)

$$\left.\begin{array}{r} \text{f on diferentseeruv punktis } a, \\ \text{f-nil } f \text{ on punktis } a \text{ lokaalne ekstreemum} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f'(a) = 0.$$

Funktsiooni $f : I \to \mathbb{R}$ määramispiirkonna sisepunkti $c \in I^\circ$, mille korral $f'(c) = 0$, nimetatakse *statsionaarseks punktiks.*

Funktsiooni $f : I \to \mathbb{R}$ määramispiirkonna sisepunkti $c \in I^\circ$, mille korral kas $f'(c) = 0$ või ei leidu tuletist $f'(c)$, nimetatakse *kriitiliseks punktiks.*

Lause 7.2. Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ ja a funktsiooni f kriitiline punkt. Kui leidub $\delta > 0$ selliselt, et funktsioon f on diferentseeruv vahemikes $(a-\delta, a)$ ja $(a, a+\delta)$ ning pidev punktis a, siis

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, t \in (a-\delta, a)\ \ f'(t) > 0,\\ \forall\, t \in (a, a+\delta)\ \ f'(t) < 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ range lokaalne maksimum.}$$

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, t \in (a-\delta, a)\ \ f'(t) \geqslant 0,\\ \forall\, t \in (a, a+\delta)\ \ f'(t) \leqslant 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ lokaalne maksimum,}$$

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, t \in (a-\delta, a)\ \ f'(t) < 0,\\ \forall\, t \in (a, a+\delta)\ \ f'(t) > 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ range lokaalne miinimum,}$$

$$\left.\begin{array}{r}\forall\, t \in (a-\delta, a)\ \ f'(t) \leqslant 0,\\ \forall\, t \in (a, a+\delta)\ \ f'(t) \geqslant 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ lokaalne miinimum,}$$

$$\forall\, t \in (a-\delta, a+\delta)\ \ f'(t) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{f-nil } f \text{ ei ole p-s } a \text{ ekstreemumit,}$$

$$\forall\, t \in (a-\delta, a+\delta)\ \ f'(t) < 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{f-nil } f \text{ ei ole p-s } a \text{ ekstreemumit.}$$

Lause 7.3. Olgu $X \subset \mathbb{R}$ ja olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$ kaks korda diferentseeruv punktis $c \in X$. Siis

$$\left.\begin{array}{l}f'(a) = 0,\\ f''(a) < 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ range lokaalne maksimum,}$$

$$\left.\begin{array}{l}f'(a) = 0,\\ f''(a) > 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{f-nil } f \text{ on p-s } a \text{ range lokaalne miinimum.}$$

Üldnimetus funktsiooni suurima ja vähima väärtuse jaoks:
globaalne ekstreemum.

Teoreem 4.6. (Weierstrass II)**.** Olgu $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Kui f on pidev lõigus $[a, b]$, siis tal on selles lõigus suurim ja vähim väärtus, st.

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : \forall x \in [a, b]\ \ f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2).$$