# Matemaatiline analüüs I
# 14. praktikum

Olgu $I$ intervall, $I \subset X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Joon $y = f(x)$ on *kumer* intervallis $I \overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall [x_1, x_2] \subset I \ \ \forall x \in [x_1, x_2] \ \ f(x) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1).$$

Joon $y = f(x)$ on nõgus intervallis $I \overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall [x_1, x_2] \subset I \ \ \forall x \in [x_1, x_2] \ \ f(x) \geqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + f(x_1).$$

Siin tasub tähele panna, et mõisted “kumer” ja “nõgus” on defineeritud täpselt vastupidiselt sellele, kuidas neid intuitiivselt nimetatakse.

**Lause 7.5.** Olgu $I$ lahtine intervall, $I \subset X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ diferentseeruv funktsioon intervallis $I$. Siis

$$\begin{cases} \text{joon } y = f(x) \text{ on kumer intervallis } I \iff f' \text{ kahanev intervallis } I, \\ \text{joon } y = f(x) \text{ on nõgus intervallis } I \iff f' \text{ kasvav intervallis } I. \end{cases}$$

**Lause 7.6.** Olgu $I$ lahtine intervall, $I \subset X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ kaks korda diferentseeruv funktsioon intervallis $I$. Siis

$$\begin{cases} \text{joon } y = f(x) \text{ on kumer intervallis } I \iff \forall x \in I \ \ f''(x) \leqslant 0, \\ \text{joon } y = f(x) \text{ on nõgus intervallis } I \iff \forall x \in I \ \ f''(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Leidugu $\delta > 0$ nii, et $(a - \delta, a + \delta) \subset X \subset \mathbb{R}$ ning $f\colon X \to \mathbb{R}$.

Punkt $(a, f(a))$ on joone $y = f(x)$ *käänupunkt* $\overset{\text{def}}{\iff}$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \left\{ \begin{array}{l} f \textbf{ pidev punktis } a, \\ y = f(x) \text{ kumer } (a - \delta, a)\text{-s}, \\ y = f(x) \text{ nõgus } (a, a + \delta)\text{-s} \end{array} \right\} \vee \left\{ \begin{array}{l} f \textbf{ pidev punktis } a, \\ y = f(x) \text{ nõgus } (a - \delta, a)\text{-s}, \\ y = f(x) \text{ kumer } (a, a + \delta)\text{-s}. \end{array} \right.$$

Olgu $s$ sirge. Tähistame punkti $(x,y)$ kaugust sirgest $s$ (st. punktist $(x,y)$ sirgeni $s$ tõmmatud ristlõigu pikkust) tähisega $d((x,y),s)$.

Leidugu $R>0$ nii, et $(R,\infty)\subset X\subset\mathbb{R}$ ning olgu $f\colon X\to\mathbb{R}$.
Sirge $s$ on joone $y=f(x)$ *kaldasümptoot* protsessis $x\to\infty$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \lim_{x\to\infty} d((x,f(x)),s)=0.$$

Leidugu $R<0$ nii, et $(-\infty,R)\subset X\subset\mathbb{R}$ ning olgu $f\colon X\to\mathbb{R}$.
Sirge $s$ on joone $y=f(x)$ *kaldasümptoot* protsessis $x\to-\infty$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad \lim_{x\to-\infty} d((x,f(x)),s)=0.$$

**Lause 7.7.** Olgu $m,b\in\mathbb{R}$. Siis sirge $y=mx+b$ on joone $y=f(x)$

kaldasümptoot protsessis $x\to\infty$ parajasti siis, kui $\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}, \\ b=\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big); \end{cases}$

kaldasümptoot protsessis $x\to-\infty$ parajasti siis, kui $\begin{cases} m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}, \\ b=\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-mx\big). \end{cases}$

Kaldasümptooti juhul $m=0$ nimetatakse ka *rõhtasümptoodiks*.

Olgu $\delta>0$, $a\in\mathbb{R}$, $(a,a+\delta)\subset X\subset\mathbb{R}$ ja $f\colon X\to\mathbb{R}$.
Sirge $x=a$ on joone $y=f(x)$ *püstasümptoot* protsessis $x\to a+$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to a+} f(x)=\infty \bigvee \lim_{x\to a+} f(x)=-\infty.$$

Olgu $\delta>0$, $a\in\mathbb{R}$, $(a-\delta,a)\subset X\subset\mathbb{R}$ ja $f\colon X\to\mathbb{R}$.
Sirge $x=a$ on joone $y=f(x)$ *püstasümptoot* protsessis $x\to a-$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to a-} f(x)=\infty \bigvee \lim_{x\to a-} f(x)=-\infty.$$

Funktsiooni uurimisel ja funktsiooni graafiku skitseerimiseks on vaja leida järgmised andmed:

1. määramispiirkond;
2. pidevuse piirkond ja katkevuspunktid;
3. paarsus (paaris või paaritu), perioodilisus;
4. funktsiooni nullkohad;
5. kasvamis- ja kahanemispiirkonnad,
   lokaalsed ja globaalsed ekstreemumid,
6. graafiku kumerus- ja nõgususpiirkonnad,
   käänupunktid,
7. kald- ja püstasümptoodid.