Matemaatiline analüüs I
15. praktikum

Olgu D intervall, $D \subset X \subset \mathbb{R}$ ja $F, f\colon X \to \mathbb{R}$.

Funktsioon F on funktsiooni f *algfunktsioon* intervallis D parajasti siis, kui

$$\forall x \in D \;\; F'(x) = f(x).$$

Lause. Kui funktsioonid F ja G on funktsiooni f algfunktsioonid intervallis D, siis leidub $C \in \mathbb{R}$ nii, et $G(x) = F(x) + C$ iga $x \in D$ korral.

Olgu funktsioon F funktsiooni f algfunktsioon intervallis D. Funktsiooni f *määramata integraaliks* intervallis D nimetatakse avaldist

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

(Siin C on reaalarv, mille väärtus jäetakse täpsustamata.)
Integreerimine on diferentseerimise pöördoperatsioon, st.

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

Teoreem 12.8. Igal lõigus $[a,b]$ pideval funktsioonil leidub selles lõigus algfunktsioon.

Lause 8.1. Olgu D intervall, $D \subset X \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} \exists \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D, \\ \exists \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D \end{array}\right\} \implies \int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D.$$

Lause 8.2. Olgu D intervall, $D \subset X \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\exists \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D \implies \int \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ intervallis } D.$$

Valem 8.3. (Muutujate vahetuse võte) Olgu T ja X intervallid, $f\colon T \to \mathbb{R}$, $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} F \text{ on } f \text{ algf-n int-s } T, \\ \varphi(X) \subset T, \\ \varphi \text{ on dif-v int-s } X \end{array}\right\} \implies \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = F(\varphi(x)) + C \text{ int-s } X.$$

Lause 8.3. (Ositi integreerimise reegel) Olgu D intervall, $f, g\colon D \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} f, g \text{ dif-v int-s } D, \\ \exists \displaystyle\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \text{ int-s } D \end{array}\right\} \implies \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \text{ int-s } D.$$

Olulisi algfunktsioone:

$$\int 0\,\mathrm{d}x = C$$

$$\int c\,\mathrm{d}x = cx + C, c \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,\ x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C,\ x \neq 0$$

$$\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C,\ x \geqslant 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C,\ x > 0$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ x > 0,\quad a \neq -1$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \neq 1$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\cot x + C,\quad x \neq k\pi$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C,\quad x \neq (2k \pm 1)\pi$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctan} x + C = -\operatorname{arccot} x + C$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arth} x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C,\ |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcth} x + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + C,\ |x| > 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsh} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C = -\arccos x + C,\quad |x| < 1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arch} x + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C,\quad |x| > 1$$

$$\int \operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{th} x + C$$