Matemaatiline analüüs I
2. praktikum

Olgu $X \subset \mathbb{R}$ ning $a \in \mathbb{R}$.

$$\max X = a \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} a \in X, \\ \forall x \in X \;\; x \leqslant a. \end{cases} \quad (a \text{ on hulga } X \textit{ suurim element})$$

$$\min X = a \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} a \in X, \\ \forall x \in X \;\; a \leqslant x. \end{cases} \quad (a \text{ on hulga } X \textit{ vähim element})$$

X on *ülalt tõkestatud* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \;\; x \leqslant M.$
Arvu M nimetatakse hulga X *ülemiseks tõkkeks.*
Ülemisi tõkkeid kas ei leidu üldse või on neid lõpmata palju.

X on *alt tõkestatud* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \;\; m \leqslant x.$
Arvu m nimetatakse hulga X *alumiseks tõkkeks.*
Alumisi tõkkeid kas ei leidu üldse või on neid lõpmata palju.

X on *tõkestatud* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X on ülalt tõkestatud ja alt tõkestatud.

$$\sup X = a \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall x \in X \;\; x \leqslant a, \\ \forall b \in \mathbb{R} \;\; ((\forall x \in X \, x \leqslant b) \Rightarrow a \leqslant b). \end{cases}$$

Arv a on hulga X *ülemine raja.* Ülemine raja leidub (ja on üheselt määratud) parajasti siis, kui hulk X on alt tõkestatud (pidevuse aksioom).

$$\inf X = a \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \forall x \in X \;\; a \leqslant x, \\ \forall b \in \mathbb{R} \;\; ((\forall x \in X \, b \leqslant x) \Rightarrow b \leqslant a). \end{cases}$$

Arv a on hulga X *alumine raja.* Alumine raja leidub (ja on üheselt määratud) parajasti siis, kui hulk X on alt tõkestatud (pidevuse aksioom).
Olukorda, et X ei ole alt tõkestatud, tähistatakse ka $\inf X = -\infty$.
Olukorda, et X ei ole ülalt tõkestatud, tähistatakse ka $\sup X = \infty$.

Lause 1.2. Olgu $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$. Siis $a = \sup X$ parajasti siis, kui

$$\begin{cases} (i) \; \forall x \in X \;\; x \leqslant a, \\ (ii) \; \forall b \in \mathbb{R} \; [(b < a) \;\Rightarrow\; (\exists x_0 \in X : \;\; b < x_0)]; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \; \forall x \in X \;\; x \leqslant a, \\ (ii) \; \forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \; (\exists x_0 \in X : \;\; a - \varepsilon < x_0)]. \end{cases}$$

Lause 1.3. Olgu $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$. Siis $a = \inf X$ parajasti siis, kui

$$\begin{cases} (i) \; \forall x \in X \;\; x \geqslant a, \\ (ii) \; \forall b \in \mathbb{R} \; [(b > a) \;\Rightarrow\; (\exists x_0 \in X : \;\; b > x_0)]; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (i) \; \forall x \in X \;\; x \geqslant a, \\ (ii) \; \forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{R} \; (\exists x_0 \in X : \;\; x_0 < a + \varepsilon)]. \end{cases}$$

Lause 1.4. $\begin{cases} \exists \max X \quad \Rightarrow \quad \sup X = \max X \\ \exists \min X \quad \Rightarrow \quad \inf X = \min X. \end{cases}$

Olgu X ja Y hulgad.

Kujutus e. *funktsioon* $f\colon X \to Y \overset{\text{def}}{\iff}$ eeskiri, mis hulga X igale elemendile x seab vastavusse **ühe** kindla elemendi $f(x)$ hulgast Y.

X – kujutuse f *lähtehulk* (e. *määramispiirkond*),
Y – kujutuse f *sihthulk*,
$f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}$ – kujutuse f *väärtuste hulk* (e. *muutumispiirkond*).
Olgu $X_1 \subset X \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

f *alt tõkestatud* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\iff} \{f(x)\colon x \in X_1\}$ on alt tõkestatud,

f *ülalt tõkestatud* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\iff} \{f(x)\colon x \in X_1\}$ on ülalt tõkestatud,

f *tõkestatud* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\iff} f$ on alt ja ülalt tõkestatud hulgas X_1.

Kujutust, mille lähtehulk on $\mathbb{N}$ ja sihthulk on $\mathbb{R}$, nimetatakse *arvjadaks* ehk *jadaks.*
Tähis: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ või $(a_n)_n$ või (a_n) või $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.
Olgu (a_n) arvjada, $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_n a_n = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_n a_n = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant N \Rightarrow a_n > \varepsilon.$$

$$\lim_n a_n = -\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant N \Rightarrow a_n < -\varepsilon.$$

Jada (a_n) on *koonduv* $\overset{\text{def}}{\iff} \exists A \in \mathbb{R} : \lim_n a_n = A$. Mittekoonduvat jada nimetatakse *hajuvaks.*

Lause 2.7. $\lim_n r^n = \begin{cases} 0, \text{ kui } |r|<1; \\ 1, \text{ kui } r = 1; \\ \infty, \text{ kui } r > 1. \end{cases}$.

Lause 2.8. $a > 0 \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{a} = 1.$

Lause 2.9. $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1.$

Lause 2.10. $\lim_n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828182845\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

Lause 2.6 (piirväärtuse aritmeetika)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu (a_n) ja (b_n) arvjadad. Olgu $*$ mingi aritmeetiline tehe.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_n a_n = A, \\ \lim_n b_n = B \end{array}\right\} \implies \lim_n (a_n * b_n) = A * B.$$

Sealjuures jagamistehte juures tuleb nõuda, et nii B kui ka iga n korral b_n ei oleks võrdne 0-ga.

Lause 2.4 (piirväärtuse monotoonsus)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu (a_n) ja (b_n) arvjadad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_n a_n = A, \\ \lim_n b_n = B, \\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ \ a_n \leqslant b_n \end{array}\right\} \implies A \leqslant B.$$

Piirväärtuse monotoonsusest järeldub (valides $(a_n) = (b_n)$), et piirväärtus on üheselt määratud.

Lause 2.5 (keskmise muutuja omadus)**.** Olgu $A \in \mathbb{R}$, olgu (a_n), (b_n) ja (c_n) arvjadad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_n a_n = A, \\ \lim_n b_n = A, \\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ \ a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \end{array}\right\} \implies \lim_n c_n = A.$$