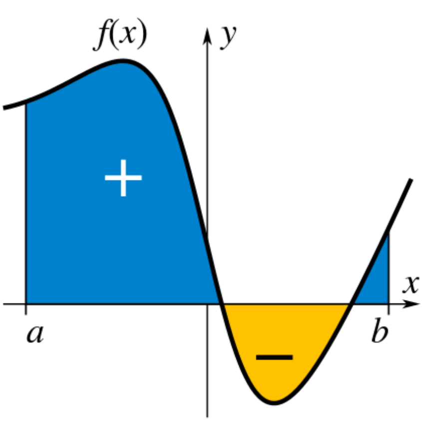
Matemaatiline analüüs I
23. praktikum

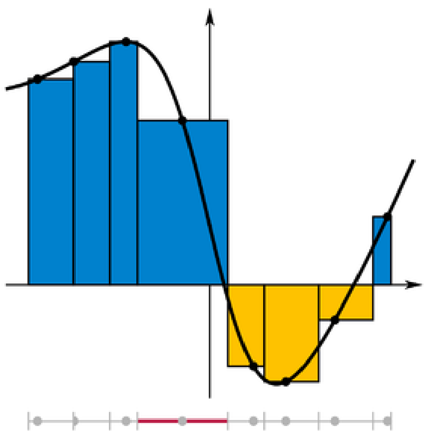
Olgu $[a,b] \subset X$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots n$.

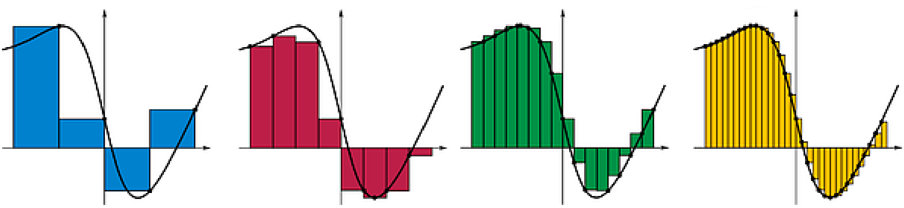
Funktsioon f on (Riemanni mõttes) *integreeruv lõigus* $[a,b]$, kui leidub lõplik piirväärtus $I = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \in \mathbb{R}$ punktide ξ_i valikust sõltumatult. Sel juhul öeldakse, et arv I on funktsiooni f *määratud integraal* lõigus $[a,b]$ ja kirjutatakse

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Geomeetriliselt on määratud integraal $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ joontega $y = 0$, $x = a$, $x = b$ ja $y = f(x)$ piiratud kõvertrapetsi pindala, kui x-teljest allpool olevat osa arvestada miinusmärgiga.







Olgu $[a,b] \subset X \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon X \to \mathbb{R}$.

Lause 12.1. Iga lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon f on integreeruv ka igas osalõigus $[a_1, b_1] \subset [a,b]$.

Teoreem 11.5 Lõigus $[a,b]$ pidev funktsioon f on integreeruv lõigus $[a,b]$.
Lause Y. Kui funktsioonil f on vaid lõplik või loenduv arv katkevuspunkte lõigus $[a,b]$, siis f on integreeruv lõigus $[a,b]$.

Lause 11.6. Kui funktsioon f on kasvav või kahanev lõigus $[a,b]$, siis f on integreeruv lõigus $[a,b]$.

Lause 12.5. Kui funktsioon f on integreeruv lõigus $[a,b]$ ja hulk $\{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\}$ on lõplik, siis funktsioon g on integreeruv lõigus $[a,b]$ ja

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause X. Lõigus $[a,b]$ integreeruv funktsioon f on tõkestatud lõigus $[a,b]$.

Lause 12.2. Kui funktsioon f on integreeruv lõikudes $[a,b]$ ja $[b,c]$, siis

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause Z. Kui $a > 0$, funktsioon f on integreeruv lõigus $[-a,a]$ ja iga $x \in [-a,a]$ korral $f(-x) = -f(x)$ $\big(f(-x) = f(x)\big)$, siis

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad \left(\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Laused 12.3.-12.4. Kui funktsioonid f ja g on integreeruvad lõigus $[a,b]$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, siis ka funktsioonid $f \pm g$, $f \cdot g$ ja $\lambda \cdot f$ on integreeruvad lõigus $[a,b]$, kusjuures

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

ja

$$\int_a^b \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Lause 12.6. Olgu funktsioonid f ja g integreeruvad lõigus $[a,b]$ ja kehtigu $f(x) \leqslant g(x)$ iga $x \in [a,b]$ korral. Siis funktsioon $|f|$ on integreeruv lõigus $[a,b]$ ning

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{ja} \quad \left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Kui lisaks leidub selline punkt $x_0 \in [a,b]$, et f ja g on pidevad punktis x_0 ja $f(x_0) < g(x_0)$, siis

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teoreem 12.8. Olgu funktsioon f integreeruv lõigus $[a,b]$ ja pidev punktis $x_0 \in (a,b)$. Siis funktsioon $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

on diferentseeruv punktis x_0 ja

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Kui funktsioon f on paremalt pidev punktis a (vasakult pidev punktis b), siis funktsioonil F-l eksisteerib lõplik parempoolne tuletis punktis a (lõplik vasakpoolne tuletis punktis b), kusjuures

$$F'(a^+) = f(a) \quad \big(F'(b^-) = f(b)\big).$$

Järeldus 12.10. (Newton–Leibniz)**.** Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a,b]$ ja funktsioon G on funktsiooni f suvaline algfunktsioon lõigus $[a,b]$, siis

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a).$$