Matemaatiline analüüs I
3. praktikum

Olgu X ja Y hulgad.

Kujutus e. *funktsioon* $f\colon X \to Y \overset{\text{def}}{\iff}$ eeskiri, mis hulga X igale elemendile x seab vastavusse **ühe** kindla elemendi $f(x)$ hulgast Y.

X – kujutuse f *lähtehulk* (e. *määramispiirkond*),
Y – kujutuse f *sihthulk*,
$f(X) = \{f(x)\colon x \in X\}$ – kujutuse f *väärtuste hulk* (e. *muutumispiirkond*).
Olgu $X_1 \subset X \subset \mathbb{R}$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

f *alt tõkestatud* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\iff} \{f(x)\colon x \in X_1\}$ on alt tõkestatud,

f *ülalt tõkestatud* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\iff} \{f(x)\colon x \in X_1\}$ on ülalt tõkestatud,

f *tõkestatud* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\iff} f$ on alt ja ülalt tõkestatud hulgas X_1.

Kujutust, mille lähtehulk on $\mathbb{N}$ ja sihthulk on $\mathbb{R}$, nimetatakse *arvjadaks* ehk *jadaks.*
Tähis: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ või $(a_n)_n$ või (a_n) või $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.
Olgu (a_n) arvjada, $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_n a_n = A \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_n a_n = \infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant N \Rightarrow a_n > \varepsilon.$$

$$\lim_n a_n = -\infty \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}\ \ n \geqslant N \Rightarrow a_n < -\varepsilon.$$

Jada (a_n) on *koonduv* $\overset{\text{def}}{\iff} \exists A \in \mathbb{R} : \lim_n a_n = A$. Mittekoonduvat jada nimetatakse *hajuvaks.*

Lause 2.7. $\lim_n r^n = \begin{cases} 0, & \text{kui } |r|<1; \\ 1, & \text{kui } r = 1; \\ \infty, & \text{kui } r > 1. \end{cases}$.

Lause 2.8. $a > 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n \sqrt[n]{a} = 1.$

Lause 2.9. $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1.$

Lause 2.10. $\lim_n \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828182845... \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

Lause 2.6 (piirväärtuse aritmeetika)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu (a_n) ja (b_n) arvjadad. Olgu $*$ mingi aritmeetiline tehe.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_n a_n = A, \\ \lim_n b_n = B \end{array}\right\} \implies \lim_n (a_n * b_n) = A * B.$$

Sealjuures jagamistehte juures tuleb nõuda, et nii B kui ka iga n korral b_n ei oleks võrdne 0-ga.

Lause 2.4 (piirväärtuse monotoonsus)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu (a_n) ja (b_n) arvjadad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_n a_n = A, \\ \lim_n b_n = B, \\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ \ a_n \leqslant b_n \end{array}\right\} \implies A \leqslant B.$$

Piirväärtuse monotoonsusest järeldub (valides $(a_n) = (b_n)$), et piirväärtus on üheselt määratud.

Lause 2.5 (keskmise muutuja omadus)**.** Olgu $A \in \mathbb{R}$, olgu (a_n), (b_n) ja (c_n) arvjadad.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_n a_n = A, \\ \lim_n b_n = A, \\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant N\ \ a_n \leqslant c_n \leqslant b_n \end{array}\right\} \implies \lim_n c_n = A.$$

Arv $a \in \mathbb{R}$ on hulga X *kuhjumispunkt* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \delta > 0 \ \ ((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$.
Olgu a hulga X kuhjumispunkt, $A \in \mathbb{R}$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ z < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Viimase kahe definitsiooni korral on kuhjumispunkti asemel vaja nõuda,
et hulk X oleks ülalt (alt) tõkestamata.
Arvu A nimetatakse funktsiooni f *piirväärtuseks* punktis $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.
Olgu a hulga X kuhjumispunkt ning $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in X \ \ 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Arvu A nimetatakse funktsiooni f *ühepoolseks piirväärtuseks* punktis $a \in \mathbb{R}$.
Lause 3.3. (piirväärtuse ühesus) Kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, kus $A, B \in \mathbb{R}$, siis $A = B$.
Lause 3.1+. Olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt, olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \iff \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A \end{cases}$$

Lause 3.7 (piirväärtuse aritmeetika)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt,
olgu $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ ning $*$ olgu mingi aritmeetiline tehe. Siis

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} (f(x) * g(x)) = A * B.$$

Sealjuures jagamise juures tuleb vältida nii B kui ka $g(x)$ korral nulliga jagamist.
Lause 3.8 (piirväärtuse monotoonsus)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt,
olgu $f, g\colon X \to \mathbb{R}$. Siis

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B, \\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \ \ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad A \leqslant B.$$

Lause 3.6. (keskmise muutuja omadus)**.** Olgu $A \in \mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt,
olgu $f, g, h\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = A, \\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \ \ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} h(x) = A.$$

Teoreem 3.2 (Heine kriteerium)**.** Olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, a hulga X kuhjumispunkt ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \iff \quad \forall (x_n) \subset X \setminus \{a\} \ \ \Big(\lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = A\Big).$$

Piirväärtuse ühesus, aritmeetika, monotoonsus, keskmise muutuja omadus ja
Heine kriteerium kehtivad ka kõigi teiste protsesside ($x \to a+, x \to a-, x \to \infty, x \to -\infty$) jaoks.

Olgu $(n_k) \subset \mathbb{N}$. Jada $(a_{n_k})_k$ nimetatakse jada (a_n) *osajadaks.*
Lause. Olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n} a_n = A, \\ (n_k) \subset \mathbb{N} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_k a_{n_k} = A.$$

Olulisi piirväärtusi:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}} = e^{km},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}} = 1.$$