Matemaatiline analüüs I
4. praktikum

Arv $a \in \mathbb{R}$ on hulga X *kuhjumispunkt* $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\forall \delta > 0\ \ ((a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}) \cap X \neq \emptyset$.
Olgu a hulga X kuhjumispunkt, $A \in \mathbb{R}$ ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X\ \ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X\ \ x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X\ \ z < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Viimase kahe definitsiooni korral on kuhjumispunkti asemel vaja nõuda,
et hulk X oleks ülalt (alt) tõkestamata.
Arvu A nimetatakse funktsiooni f *piirväärtuseks* punktis $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.
Olgu a hulga X kuhjumispunkt ning $A \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X\ \ 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = A \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0\ \ \forall x \in X\ \ 0 < a-x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Arvu A nimetatakse funktsiooni f *ühepoolseks piirväärtuseks* punktis $a \in \mathbb{R}$.

Lause 3.3. (piirväärtuse ühesus) Kui $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, kus $A, B \in \mathbb{R}$, siis $A = B$.

Lause 3.1+. Olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt, olgu $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \iff \quad \begin{cases} \lim\limits_{x\to a+} f(x) = A \\ \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A \end{cases}$$

Lause 3.7 (piirväärtuse aritmeetika)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt,
olgu $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ ning $*$ olgu mingi aritmeetiline tehe. Siis

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a} (f(x) * g(x)) = A * B.$$

Sealjuures jagamise juures tuleb vältida nii B kui ka $g(x)$ korral nulliga jagamist.

Lause 3.8 (piirväärtuse monotoonsus)**.** Olgu $A, B \in \mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt,
olgu $f, g\colon X \to \mathbb{R}$. Siis

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = B, \\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\ \ f(x) \leqslant g(x) \end{array}\right\} \implies A \leqslant B.$$

Lause 3.6. (keskmise muutuja omadus)**.** Olgu $A \in \mathbb{R}$, olgu a hulga X kuhjumispunkt,
olgu $f, g, h\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to a} g(x) = A, \\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}\ \ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \end{array}\right\} \implies \lim_{x\to a} h(x) = A.$$

Teoreem 3.2 (Heine kriteerium)**.** Olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, a hulga X kuhjumispunkt ja $f\colon X \to \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \iff \quad \forall (x_n) \subset X \setminus \{a\}\ \ \Big(\lim_n x_n = a \Rightarrow \lim_n f(x_n) = A\Big).$$

Piirväärtuse ühesus, aritmeetika, monotoonsus, keskmise muutuja omadus ja
Heine kriteerium kehtivad ka kõigi teiste protsesside ($x \to a+, x \to a-, x \to \infty, x \to -\infty$) jaoks.

Olulisi piirväärtusi:

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{x}{n}} = 1. \qquad \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}} = e^{km},$$