Matemaatiline analüüs I
5. praktikum

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, olgu ∞ hulga X kuhjumispunkt (st. $\forall R > 0\ \ (R,\infty) \cap X \neq \emptyset$) ja $\alpha, \beta\colon\ X \to \mathbb{R}$.

$$\alpha \in o(\beta) \text{ protsessis } x \to \infty \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall K > 0\ \exists D > 0 : \forall x \in X\ \ x > D \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant K|\beta(x)|.$$

$$\alpha \in O(\beta) \text{ protsessis } x \to \infty \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \exists K > 0\ \exists D > 0 : \forall x \in X\ \ x > D \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant K|\beta(x)|.$$

$$\alpha \in \Theta(\beta) \text{ protsessis } x \to \infty \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \alpha \in O(\beta) \wedge \beta \in O(\alpha).$$

$$\alpha \sim \beta \text{ (\textit{ekvivalentsed}) protsessis } x \to \infty \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Lause 1. Olgu $\alpha, \beta\colon\ X \to \mathbb{R}$ ja $* \in \{o, O, \Theta\}$. Siis $o(\alpha) \subset O(\alpha)$, $\ *(\alpha) + *(\alpha) \subset *(\alpha)$,
$*(*(\alpha)) \subset *(\alpha)$ ja $*(\alpha) \cdot *(\beta) \subset *(\alpha \cdot \beta)$.

Lause 2. $\alpha \in o(\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$

Lause 3. $\alpha \in O(\beta) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists K > 0\ \exists D > 0 : \forall x \in X\ \ x > D \Rightarrow -K \leqslant \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \leqslant K.$

Lause 4. $\alpha \sim \beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \Theta(\beta)$ (aga üldjuhul $\alpha \sim \beta \quad \not\Longleftarrow \quad \alpha \in \Theta(\beta)$).

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga X kuhjumispunkt, olgu $f, g, h\colon\ X \to \mathbb{R}$, olgu $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Teoreem 5.

$$\left.\begin{array}{r} f \sim g \text{ protsessis } x \to a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot h(x) = A \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to a} g(x)\cdot h(x) = A.$$

Landau sümbolid (ehk *O-notatsiooni*) ja suuruste ekvivalentsuse saab analoogiliselt defineerida ka kõigi teiste protsesside ning jada piirväärtuse jaoks. Näiteks kui $X \subset \mathbb{R}$, a on hulga X kuhjumispunkt ja $\alpha, \beta\colon\ X \to \mathbb{R}$, siis

$$\alpha \in o(\beta) \text{ protsessis } x \to a- \quad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall K > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in X\ \ -\delta < x < a \Rightarrow |\alpha(x)| \leqslant K\beta(x).$$

Suurus	Käitumine protsessis$x \to \infty$	Omadus	Põhjus
$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$	$\alpha \in o(\beta) \wedge \alpha \in O(\beta)$	lause 1 & lause 2
$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \pm\infty$	$\beta \in o(\alpha) \wedge \beta \in O(\alpha)$	lause 1 & lause 2
$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$	$\alpha \sim \beta \wedge \alpha \in \Theta(\beta) \wedge \beta \in \Theta(\alpha)$	def.-n. & lause 4
$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	tõkestatud	$\alpha \in O(\beta)$	lause 3
$\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$	tõkestatud	$\beta \in O(\alpha)$	lause 3
$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}, \frac{\beta(x)}{\alpha(x)}$	tõkestatud	$\alpha \in \Theta(\beta) \wedge \beta \in \Theta(\alpha)$	definitsioon

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, olgu $a \in X$ hulga X kuhjumispunkt.

f pidev punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

f vasakult (paremalt) pidev punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x\to a+} f(x) = f(a)\right)$.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$, olgu $a \in \mathbb{R}$ hulga X kuhjumispunkt.

F-nil f on *esimest liiki katkevus* punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a+} f(x) \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x\to a-} f(x) \in \mathbb{R} \\ \lim\limits_{x\to a+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a-} f(x). \end{cases}$

F-nil f on *kõrvaldatav katkevus* punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}, \\ a \notin X \vee f(a) \neq \lim\limits_{x\to a} f(x). \end{cases}$

F-nil f on *teist liiki katkevus* punktis a $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\begin{cases} \text{vähemalt üks piirväärtustest} \\ \lim\limits_{x\to a+} f(x) \text{ ja } \lim\limits_{x\to a-} f(x) \\ \text{on lõpmatu või ei eksisteeri.} \end{cases}$