Matemaatiline analüüs I
8. praktikum

Olgu $X_1 \subset X \subset \mathbb{R}$ ning $f\colon X \to \mathbb{R}$.

f *(rangelt) kasvav* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X_1 \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2) \; \big(f(x_1) < f(x_2)\big)$.

f *(rangelt) kahanev* hulgas $X_1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X_1 \;\; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2) \; \big(f(x_1) > f(x_2)\big)$.

Üldnimetus „kasvava“ ja „kahaneva“ jaoks: „monotoonne“.

Kui $X_1 = X$, jäetakse väljend „hulgas X_1“ ära.

Lause 5.1. f dif-v punktis $a \quad \Longrightarrow \quad f$ pidev punktis a.

Olgu X ja Y suvalised hulgad. Olgu $f\colon X \to Y$.

Lause. f on bijektiivne $\quad \Longleftrightarrow \quad \exists g\colon Y \to X : \begin{cases} \forall x \in X \;\; g(f(x)) = x, \\ \forall y \in Y \;\; f(g(y)) = y. \end{cases}$

Lauses märgitud kujutust g nimetatakse kujutuse f *pöördkujutuseks* ehk *pöördfunktsiooniks* ja tähistatakse sümboliga f^{-1}.

Olgu $X \subset \mathbb{R}$ ning $f\colon X \to f(D) \subset \mathbb{R}$.

Lause 4.7.

f rangelt monotoonne $\quad \Longrightarrow \quad f$ on bijektiivne ja $f^{-1} : f(D) \to X$ on rangelt monotoonne.

Lause 5.7. (pöördfunktsiooni dif-vus)**.** Olgu $x \in D$.

$$\left.\begin{array}{r} f\colon D \to f(D), \\ f \text{ pidev}, \\ f \text{ rangelt monotoonne}, \\ f \text{ dif-v punktis } x, \\ f'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} f^{-1} \text{ dif-v punktis } y := f(x), \\ (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}. \end{array}\right.$$

Logaritmilise diferentseerimise võte: $f'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'$.

Põhjendus: kui $y = f(x)$ on raskemini diferentseeritav kui funktsioon $\ln|y| = g(x)$, siis võib leida $(\ln|f(x)|)' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = g'(x)$, kust $f'(x) = f(x)g'(x) = f(x)(\ln|f(x)|)'$.

Olulisi tuletisi:

$c' = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
$x' = 1$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2},\ x \neq 0$	$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \neq (2k \pm 1)\pi$	$(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$	$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi$	$(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert < 1$	$(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$(e^x)' = e^x$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert < 1$	$(\operatorname{arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert < 1$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$	$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2},$	$(\operatorname{arcth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert > 1$
$(\log_a\lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x\ln a},\ x \neq 0$		