# Polünoomid ja ratsionaalmurrud

**Definitsioon 1.** *Polünoomiks* nimetatakse funktsiooni $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mis on kas samaselt null või mille korral leiduvad reaalarvud $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ nii, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ning $a_n \neq 0$. Arvusid $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ nimetatakse polünoomi $P$ *kordajateks.* Arvu $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ nimetatakse nullist erineva polünoomi $P$ *astmeks*, tähistatakse $\deg P = n$. (Lisaks defineeritakse tehnilistel põhjustel nullpolünoomi astmeks $-\infty$.) Polünoomi $P$ *juureks* ehk *nullkohaks* nimetatakse arvu $c$, mille korral $P(c) = 0$.

Paneme tähele, et polünoomid astmega 0 on parajasti konstantsed funktsioonid, kus $f(x) = C$, $C \neq 0$.

NB! Me tegeleme üldiselt polünoomidega $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aga ülaltoodud definitsioonis põhimõtteliselt kõik jääb samaks, kui tegeleda polünoomidega $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. (Kordajad on siis kompleksarvud.) Tegeletakse ka polünoomidega, mille määramispiirkond (ja kordajad) on mingid muud hulgad (algebralised struktuurid).

NB! Kursuses „Algebra I“ defineeritakse polünoomid teisiti, nimelt jadadena, millel on ülimalt lõplik arv nullist erinevaid liikmeid. Täpsemalt siis

$$P = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \ldots).$$

Kogu teooria-arendus jõuab aga nii erikujulistest funktsioonidest kui ka jadadest lähtudes ikka samadele tulemustele, seega põhimõttelist vahet pole.

**Lause 1.** *Olgu $Q$ suvaline nullist erinev polünoom, kus*

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

*Siis leiduvad (tegurite järjekorra vahetamise täpsuseni) üheselt määratud reaalarvud $c_1, \ldots, c_s, c_{s+1}, \ldots, c_t$ ning reaalarvud $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_u, \beta_u, \alpha_{u+1}, \beta_{u+1}, \ldots, \alpha_v, \beta_v$ ja astendajad (naturaalarvud) $k_{s+1}, \ldots, k_t, m_{u+1}, \ldots, m_v > 1$ nii, et on täidetud järgmised tingimused:*

- $$\begin{aligned} Q(x) = a_n \cdot (x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_s) \cdot \\ \cdot (x - c_{s+1})^{k_{s+1}} \cdot \ldots \cdot (x - c_t)^{k_t} \cdot \\ \cdot (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1) \cdot \ldots \cdot (x^2 + \alpha_u x + \beta_u) \cdot \\ \cdot (x^2 + \alpha_{u+1} x + \beta_{u+1})^{m_{u+1}} \cdot \ldots \cdot (x^2 + \alpha_v x + \beta_v)^{m_v}, \end{aligned}$$
- *polünoomi $Q$ **kõik** reaalarvulised juured on $c_1, \ldots, c_s, c_{s+1}, \ldots, c_t$;*
- *arvud $c_1, \ldots, c_t$ ja paarid $(\alpha_1, \beta_1)$, $\ldots$, $(\alpha_v, \beta_v)$ on **kõik** erinevad,*
- *$t + 2v = n$.*

Lauses 1 toodud tegurduse nägemiseks on üks võimalus kasutada **algebra põhiteoreemi**, mis väidab, et *igal reaalarvuliste (tegelikult koguni kompleksarvuliste) kordajatega $n$-astme polünoomil on täpselt $n$ (kompleksarvulist) juurt.* Sealjuures mittereaalarvulised juured esinevad **kaaskomplekside paaridena**. Seega saame tegurduse

$$Q(x) = a_n \cdot (x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_t)^{k_t} \cdot \left((x - d_1)(x - \overline{d_1})\right) \cdot \ldots \cdot \left((x - d_v)(x - \overline{d_v})\right)^{m_v},$$

kus $c_1, \ldots, c_t, d_1, \overline{d_1}, \ldots, d_v, \overline{d_v}$ on polünoomi $Q$ **kõik juured**, sealjuures $c_1, \ldots, c_t$ on reaalsed ja $d_1, \overline{d_1}, \ldots, d_v, \overline{d_v}$ mittereaalsed. (Ühekordsed juured oleme siin kogunud ettepoole ja mitmekordsed tahapoole.) Teame, et kui $d_j = p_j + \mathrm{i}q_j$, siis kaaskompleksarv on $\overline{d_j} = p_j - \mathrm{i}q_j$. Paneme tähele, et

$$(x - d_j)(x - \overline{d_j}) = x^2 - 2p_j x + (p_j^2 + q_j^2),$$

seega saime **reaalarvuliste** kordajatega ruutpolünoomi. Sedasi ongi $\alpha_j = -2p_j$ ja $\beta_j = p_j^2 + q_j^2$ reaalarvud, $j = 1, \ldots, v$.

Lauses 1 toodud tegurduse **leidmiseks** kasutatakse teatud võtteid.

- **Ruutpolünoomi** $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ **diskriminant** $D = a_1^2 - 4a_2a_0$ määrab, kas polünoomil on kaks reaalset (erinevat või ühtuvat) või kaks mittereaalset (kaaskomplekside paarina esinevat) juurt. *Tingimus $D \geqslant 0$ on* ***samaväärne*** *sellega, et $P$ juured $c_1$ ja $c_2$ on reaalsed.* Nad avalduvad koolist tuntud valemiga $c_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{D}}{2a_2}$. Sealjuures saab kasutada ka *Viète'i valemeid* $c_1 + c_2 = -\dfrac{a_1}{a_2}$, $c_1c_2 = \dfrac{a_0}{a_2}$.
- Suvalise **täisarvuliste kordajatega** polünoomi $P$ **kõik ratsionaalarvulised juured** on taandatud murrud $\dfrac{p}{q}$, kus täisarv $p$ on $a_0$ jagaja ning täisarv $q$ on $a_n$ jagaja.
- On olemas mitmesuguseid üldisi lahendivalemeid ja -võtteid ka kõrgema astme (erikujuliste jm.) polünoomide juurte leidmiseks. Sellised valemid töötavad enamasti ainult mingitel erijuhtudel ja üldjuhul tuleb praktikas kõrget järku polünoomide juured leida **lähendusmeetoditega**. (Selleks tuleb kuulata kursust „Numbrilised meetodid“.)

**Lause 2** (jäägiga jagamine)**.** *Suvaliste polünoomide $P$ ja $Q$ korral, kus $Q$ pole nullpolünoom, leiduvad* ***üheselt määratud*** *polünoomid $P_1$ (jagatis) ja $R$ (jääk) nii, et* $\deg R < \deg Q$ *ja*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x).$$

Kirjutist $P(x) = P_1(x)Q(x) + R(x)$ võib (välja arvatud jagaja $Q$ nullkohtades) kirjutada ka kujul

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}. \tag{1}$$

Jagatise praktilise leidmise algoritm on *põhimõtteliselt samasugune nagu koolist tuntud arvude kirjalik jagamine.*

Jagamist võib õppida siit:
`http://servus.tkug.tartu.ee/~zolki/materjalid/KeerutajaKruseTartes.pdf`
lk. 41 (§2 „Hulkliige. Bezout' teoreem. Horneri skeem")

Veel jagamisrõõmu koos vastustega:

**9.** Leida jagatis.

1) $(12x^4+4x^3+9x+3):(3x-2)$
2) $(2x^4-3x^3+4x^2+1):(x^2-1)$
3) $(5x^3-2x^2-2x-1):(x^2+4x+3)$
4) $(5x^4-3x^5+3x-1):(-x^2+x+1)$
5) $(x^5+x^4+x^3+x^2+1):(x^2-x-2)$
6) $(2x^4+x^3-5x^2-x+1):(x^2-x)$
7) $(4x^4-2x^3-16x^2+5x+$ $+9):(x^2-2x-1)$
8) $(x^5+5x^3+6):(x^2+2x+3)$
9) $(x^6+x^4+x^3+x^2+$ $+1):(x^2+1)$
10) $(x^5-9x^4+26x^3-18x^2-$ $-27x+27)(x^2-4x+3)$
11) $(-12x^6+4x^5-3x^4+$ $+4x^3+8x^2-1):(x^2+1)$

**9.** 1) $4x^3+4x^2+\frac{8}{3}x+\frac{43}{9}$, jääk $\frac{113}{9}$; 2) $2x^2-3x+6$, jääk $-3x+7$; 3) $5x-22$, jääk $71x+65$; 4) $3x^3-2x^2+x-1$, jääk $3x$; 5) $x^3+2x^2+5x+10$, jääk $20x+21$; 6) $2x^2+3x-2$, jääk $-3x+1$; 7) $4x^2+6x$, jääk $11x+9$; 8) $x^3-2x^2+6x-6$, jääk $-6x+24$; 9) $x^4+x+1$, jääk $-x$; 10) $x^3-5x^2+3x+9$, jääk 0; 11) $-12x^4+4x^3+9x^2-1$, jääk 0.

**Definitsioon 2.** *Ratsionaalmurruks* nimetatakse murdu $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, kus $P$ ja $Q$ on polünoomid ja $Q$ pole nullpolünoom. Ratsionaalmurdu $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nimetatakse *lihtmurruks*, kui $\deg P < \deg Q$.

Lause 2 näitab, et *iga ratsionaalmurru saab* ***üheselt*** *esitada polünoomi ja lihtmurru summana.* Vastav esitus on (1).

**Lause 3.** *Olgu $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ lihtmurd, kusjuures polünoom $Q$ olgu tegurdatud sellisele kujule, nagu lauses 1. Siis lihtmurd $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ esitub (liidetavate järjekorra täpsuseni)* ***üheselt*** *summana, mis koosneb (jagaja $Q$ järgi loetledes) järgmistest liidetavatest:*

- *iga teguri $(x-c_j)$, kus $j=1,\dots,s$, jaoks* ***tüüp I osamurd***
$$\frac{A_j}{x-c_j},$$
- *iga teguri $(x-c_j)^{k_j}$, kus $j=s+1,\dots,t$, jaoks* ***tüüp I osamurru ja tüüp II osamurdude summa***
$$\frac{A_{1j}}{x-c_j}+\frac{A_{2j}}{(x-c_j)^2}+\dots+\frac{A_{k_j,j}}{(x-c_j)^{k_j}},$$

- *iga teguri* $(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)$*, kus* $j = 1, \ldots, u$*, jaoks* ***tüüp III osamurd***
$$\frac{A_j x + B_j}{x^2 + \alpha_j x + \beta_j},$$
- *iga teguri* $(x^2+\alpha_j x+\beta_j)^{m_j}$*, kus* $j = u+1, \ldots, v$*, jaoks* ***tüüp III osamurru ja tüüp IV osamurdude summa***
$$\frac{A_{1j} x + B_{1j}}{x^2 + \alpha_j x + \beta_j} + \frac{A_{2j} x + B_{2j}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^2} + \ldots + \frac{A_{m_j,j} x + B_{m_j,j}}{(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)^{m_j}}.$$

Antud kontekstis võib sünonüümidena kasutada mõisteid **algmurd** ja **osamurd**. Samuti võib antud kontekstis kasutada sünonüümidena mõisteid **ratsionaalmurd** ja **ratsionaalfunktsioon**. Mõnikord kasutatakse ka mõistet **ratsionaalavaldis**.

NB! Kursuses „Algebra I“ kasutatakse ülaltoodutest ainult mõisteid **algmurd** ja **ratsionaalmurd**.

**Integreerimise seisukohalt**

- tüüp I osamurru integraal leitakse selliselt:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x-5} = \ln|x-5| + C,$$
- tüüp II osamurd on astmefunktsioon, integreeritakse selliselt:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-5)^4} = -\frac{1}{3(x-5)^3} + C,$$
- tüüp III osamurd integreerub arkustangensiks, näiteks nii:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$
- tüüp IV osamurdu tuleb integreerida ositi. See on töömahukas, aga põhimõtteliselt siiski mitte midagi võimatut.

**Kokkuvõttes** oleme saanud algoritmi **suvalise ratsionaalmurru määramata integraali leidmiseks**.

- Ratsionaalmurru integreerimiseks tuleb kõigepealt lugeja nimetajaga **jagada jäägiga**, kasutades koolist tuntud jagamise algoritmi analoogi. Jagatisena saadud polünoomi integeerimine on lihtne. Järele jääb **lihtmurd**.
- Lihtmurru nimetaja tuleb esitada lauses 1 antud tegurdusena.
- Tegurduse põhjal tuleb järjest välja kirjutada lihtmurru esitus osamurdude summana. Lugejas esinevad konstandid tuleb leida näiteks **määramata kordajate meetodil**. (Või ära aimata kujul „paneme tähele, et...“)
- Kõik osamurrud tuleb ära integreerida, vastavalt sellele, millist tüüpi nad on.