Matemaatiline maailmapilt

Näidislahendus üksühesest vastavusest

Ülesanne 181. Korraldage üksühene vastavus järgmiste hulkade vahel:

d) $\left(A^B\right)^C$ ja $A^{B\times C}$.

Lahendus: Meenutame, et sümbol X^Y tähistab *kõigi* funktsioonide hulka $\{f \mid f : Y \to X \text{ on funktsioon}\}$. Üks viis üksühese vastavuse korraldamiseks on defineerida fuktsioonid

$$F : \left(A^B\right)^C \to A^{B\times C} \quad \text{ja} \quad G : A^{B\times C} \to \left(A^B\right)^C$$

selliselt, et $FG = id_{A^{B\times C}}$ ja $GF = id_{(A^B)^C}$. Siin $id_X : X \to X$ tähistab hulga X samasusteisendust (konspektis on viimast tähistatud sümboliga I_X). Defineerimegi need järgmiselt: kui $f \in \left(A^B\right)^C$, st $f : C \to A^B$ on funktsioon hulgast C *funktsioonide* hulka A^B, siis $F(f)$ (mis peab olema funktsioon tüüpi $B \times C \to A$) on niisugune funktsioon, mis argumentidele (b, c) seab vastavusse *funktsiooni* $f(c)$ väärtuse kohal b. Lühidalt,

$$F(f)((b, c)) = f(c)(b).$$

Paneme tähele, et viimane väärtus on üheselt määratud, sest nii $f(c)$ kui ka $f(c)(b)$ on üheselt määratud. Samuti $f(c)(b) \in A$, st $f(c) \in A^B$, nagu tarvis oligi.

Teisipidi, kui $g \in A^{B\times C}$, st g on funktsioon tüüpi $B \times C \to A$, siis defineerime $G(g) \in \left(A^B\right)^C$ järgmiselt: $G(g)$ on funktsioon, mille väärtus kohal c on selline funktsioon $G(g)(c) : B \to A$, mille väärtus kohal b on $g((b, c))$. St.

$$G(g)(c)(b) = g((b, c)).$$

Jällegi, kuna G on funktsioon ja seega on $g((b, c))$ üheselt määratud ning lisaks $g((b, c)) \in A$, siis $G(g)(c) \in A^B$ ja seega $G(g) \in \left(A^B\right)^C$.

Eelnevaga oleme saanud kaks funktsiooni F ja G. Kontrollime tingimusi $FG = id_{A^{B\times C}}$ ja $GF = id_{(A^B)^C}$. Valime vabalt $g \in A^{B\times C}$. Tarvis on näidata, et $(FG)(g) = g$, st $(FG)(g)((b, c)) = g((b, c))$ mistahes $(b, c) \in B \times C$ korral. Tõepoolest, kujutuse F definitsiooni kohaselt – võttes f rolli $G(g)$ – saame, et

$$(FG)(g)((b, c)) = F(G(g))((b, c)) = G(g)(c)(b) = g((b, c)).$$

Teisipidi, fikseerime vabalt funktsiooni $f \in \left(A^B\right)^C$ ja kontrollime, kas ka $(GF)(f) = f$, st kas $(GF)(f)(c) = f(c)$ iga $c \in C$ korral. Kuna viimase võrduse mõlemal poolel on funktsioonid tüüpi $B \to A$, siis peame selleks näitama, et need on võrdsed kõigil argumentidel, st $(GF)(f)(c)(b) = f(c)(b)$ iga $b \in B$ korral. Pannes G definitsioonis g asemele $F(f)$ saame tõepoolest, et

$$(GF)(f)(c)(b) = G(F(f))(c)(b) = F(f)(b, c) = f(c)(b).$$

Järelikult $(GF)(f)(c) = f(c)$ kõigi $c \in C$ korral, ehk $(GF)(f) = f$, mis tähendabki, et $GF = id_{(A^B)^C}$.

Märkus: Funktsiooni F – või täpsemalt selle funktsiooni rakendamist – tuntakse programmeerimises ja arvutiteaduses kui *curry* või *currying*. Funktsioon G on siis *uncurry* või *uncurrying*. Termin *curry* ei ole seotud karripuu või karritoiduga, vaid tuleneb ameerika matemaatiku Haskell Brooks Curry nimest. *Curry* on võib-olla kõige levinum funktsionaalses programmeerimises, ning Curry nime kannavad koguni kolm funktsionaalse programmeerimise keelt: Haskell, Brook ja Curry.