Kevad 2018

Sissejuhatus algebra struktuuridesse
1. praktikumi ülesanded

Rühmateooria.

1. Rühma G nimetatakse *tsükliliseks*, kui leidub $a \in G$ nii, et $G = \langle a \rangle$, kus $\langle a \rangle$ on sisalduvusseose mõttes vähim G alamrühm, mis sisaldab elementi a. Tõestada, et lõplik rühm G on tsükliline parajasti siis, kui arvu $|G|$ iga positiivse jagaja d jaoks leidub täpselt üks G alamrühm H omadusega $|H| = d$.

2. Tõestada, et kui $H \subseteq G$ on ainus $|H|$. järku alamrühm rühmas G, siis H on G normaaljagaja.

3. Tõestada, et $\mathbb{Z}_{2019}/\langle \overline{673} \rangle \cong \mathbb{Z}_{673}$. Kas seda tulemust saab üldistada?

4. Olgu G Abeli rühm, $p \in \mathbb{P}$ ja $|G| = p^2$. Tõestada, et kas $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ või $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

5. Tõestada, et paarissubstitutsioonide rühm A_4 ei ole lihtne.

6. Tõestada, et mittetriviaalne lõplik Abeli rühm ei saa olla jaguv.

7. Tõestada, et Prüferi p-rühma kõik alamrühmad on tsüklilised.

8. Tõestada, et faktorring $\mathbb{Z}_3[x]/(2x^3 + x + 1)\mathbb{Z}_3[x]$ on korpus $\mathbb{F}_{27}$. Leida mingi $\mathbb{F}_{27}$ primitiivne element ja selle elemendi astmete esitused polünoomide kujul (nagu tabelis arvuteooria kursuse loengukonspekti leheküljel 60). Leida järgmise avaldise väärtus korpuses $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{Z}_3[x]/(2x^3 + x + 1)\mathbb{Z}_3[x]$:

$$\left([x^2 + 2x + 3] + [x + 2]^{2018} + [2x + 1]\right) \cdot \left([x^{17} - 2] + [x^3 + 2x + 3]\right).$$

9*. Olgu G (mitte tingimata Abeli) rühm, $p \in \mathbb{P}$ ja $|G| = p^2$. Tõestada, et kas $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ või $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

10*. Olgu lõplikus rühmas G täpselt $n > 0$ elementi, mille järk on $p \in \mathbb{P}$. Tõestada, et $p \mid n + 1$.