Kevad 2018

Sissejuhatus algebra struktuuridesse
2. praktikumi ülesanded

Ringid ja moodulid.

1. Leida $\langle \sqrt[3]{3} \rangle \leq \mathbb{C}$, st kompleksarvude ringi vähim alamring, mis sisaldab elementi $\sqrt[3]{3}$.

2. Olgu R kommutatiivne ühikelemendiga ring, mis sisaldab mittetriviaalset idempotenti (st sellist elementi $r \in R$, et $r^2 = r$ ja $r \notin \{0, 1\}$). Tõestada, et leiduvad mittetriviaalsed ringid S ja T nii, et $R \cong S \times T$.

3. Leida ringi $\mathbb{Z}_n$ automorfismide rühm $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$.

4. Tõestada, et ringi R ideaal $M \neq R$ on maksimaalne parajasti siis, kui R/M on lihtne ring.

5. Tõestada, et kui I on ringi R minimaalne parempoolne ideaal ja $I^2 \neq \{0\}$, siis leidub $e = e^2 \in R$ nii, et $I = eR$.

6. Moodul M üle ringi R on *lihtne*, kui tema ainsad alammoodulid on $\{0\}$ ja M. Olgu M ja N lihtsad moodulid ning $\varphi : M \to N$ R-moodulite homomorfism. Tõestada *Schuri lemma*: φ on kas isomorfism või 0.

7. Tõestada, et mittetriviaalne lõplik Abeli rühm ei ole $\mathbb{Z}$-moodulina injektiivne.

8. Tõestada, et kõik moodulid üle ringi R on projektiivsed parajasti siis, kui nad on kõik injektiivsed.

9*. Kehtigu ringis R samasus $x^3 = x$. Tõestada, et R on kommutatiivne.

10**. Vaatleme hulka $R = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \,\text{on pidev}\}$ ringina punktiviisiliste tehete suhtes. Tõestada, et iga maksimaalne pärisideaal $M \subseteq R$ on kujul $M = M_m = \{f \in R \mid f(m) = 0\}$ mingi $m \in [0,1]$ korral.