Kevad 2018

Sissejuhatus algebra struktuuridesse
3. praktikumi ülesanded

Poolrühmad ja polügoonid.

1. Tõestada, et iga lõplik poolrühm sisaldab idempotenti.

2. Tõestada või lükata ümber: Greeni seosed $\mathcal{L}$ ja $\mathcal{R}$ on vastavalt vasakpoolne ja parempoolne kongruents.

3. Tõestada, et poolrühm S on lihtne ja kommutatiivne parajasti siis, kui S on Abeli rühm.

4. Tõestada, et poolrühm S on täiesti lihtne ja ortodoksne (st S on regulaarne ja $E(S)$ on S alampoolrühm) parajasti siis, kui $S \cong G \times R$, kus G on rühm ja R on ristkülikpoolrühm (st R on Reesi maatrikspoolrühm juhul $G = \{1\}$). Tõestuseta võib kasutada järgmist tulemust: iga täiesti lihtne poolrühm on isomorfne Reesi maatrikspoolrühmaga $\mathcal{M}[G, I, \Lambda, P]$, milles $p_{\lambda 1} = p_{1i} = 1_G$ iga $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ korral.

5. Tõestada, et täpselt ühte idempotenti sisaldav regulaarne poolrühm on rühm.

6. Vaatleme $(\mathbb{Z}, +)$ parempoolse polügoonina $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ üle iseenda. Tõestada, et selle polügooni kongruentsid on parajasti arvuteoreetilised kongruentsid. Näidata, et need kongruentsid ei ole üksüheses vastavuses $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ alammonoididega, st leidub $M \leq \mathbb{Z}$ nii, et ühegi kongruentsi ρ korral ei kehti $[0]_\rho = M$.

7. Tõestada, et S-polügoon F_S on vaba baasiga X parajasti siis, kui iga polügooni A_S ja iga kujutuse $f : X \to A$ korral leidub üheselt määratud homomorfism $g : F_S \to A_S$ nii, et $f = g\iota$, kus $\iota : X \to F$ on baasi sisestus.

8. Tähistame sümboliga $\mathcal{T}(X)$ kõigi hulga X teisenduste monoidi. Tõestada, et ${}_{\mathcal{T}(X)}X$ toimega $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$ on projektiivne $\mathcal{T}(X)$-polügoon.

9*. Anda teisenduste monoidi $\mathcal{T}(X)$ Greeni seoste $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{J}$ täielik kirjeldus.

10*. Tõestada, et iga poolrühm S, mille kõik $\mathcal{R}$-klassid sisaldavad täpselt ühte idempotenti, on ortodoksne.