Kevad 2018

Sissejuhatus algebra struktuuridesse
4. praktikumi ülesanded

Võred ja universaalalgebrad.

1. Tõestada, et igas võres kehtib *minimaks-võrratus* $\bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} x_{ij} \leq \bigwedge_{j=1}^{n} \bigvee_{i=1}^{m} x_{ij}$.

2. Tõestada, et järjestust säilitav teisendus täielikul võrel omab *vähimat* püsipunkti.

3. Tõestada, et täienditega modulaarne võre on suhteliste täienditega.

4. Tõestada loengukonspekti teoreemi 8.16 abil, et võre $(\mathbb{N}, \mathrm{SÜT}, \mathrm{VÜK})$ on distributiivne.

5. Olgu $\mathbf{A}_n = (\{0, 1, \ldots, n-1\}, 1+_n)$ algebra, mille ainus unaarne tehe on defineeritud võrdusega $1+_n(x) = 1 + x \pmod{n}$. Leida kõik homomorfismid algebrate $\mathbf{A}_m$ ja $\mathbf{A}_n$ vahel.

6. Tõestada, et ekvivalentsusseos ρ algebral $\mathbf{A}$ on kongruents parajasti siis, kui ρ on $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ alamalgebra.

7. Tõestada, et isomorfsete algebrate alamalgebrate ja kongruentside võred on samuti isomorfsed. Näidata, et vastupidine üldiselt ei kehti.

8. Tõestada, et Ω-algebrate klassi $\mathcal{K}$ vaba algebra baasiga X on ka selle klassi poolt moodustatud muutkonna $\mathrm{Var}(\mathcal{K})$ vaba algebra baasiga X.

9*. Millised järgmistest arvude ringidest tavaliste liitmis- ja korrutamistehete suhtes omavad üksühest tuletatud kahekohalist tehet (st. injektiivset binaarset termfunktsiooni $R \times R \to R$): $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$?

10**. Olgu V vektorruum üle korpuse K, $W_1, \ldots, W_n$ selle alamruumid ja $L = \langle \{W_i \mid 1 \leq i \leq n\} \rangle$ nende poolt tekitatud alamvõre kõigi V alamruumide võres $\mathcal{A}(V)$. Tõestada, et L on distributiivne parajasti siis, kui leidub selline V baas B, et $W_i = \langle B_i \rangle$ mingi $B_i \subseteq B$ korral iga $i = 1, \ldots, n$ jaoks. Näidata, et see väide ei kehti, kui alamruume W_i on lõpmata palju.