Sissejuhatud algebra struktuuridesse

Praktikum 4

Näidislahendused

1. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Tõestada, et taandamisega poolrühm S sisaldab ülimalt ühte idempotent, mis seejuures on alati S ühikelement.

Kõigepealt näitame, et leidub ülimalt üks idempotent. Olgu $a, b \in S$ mõlemad idempotendid ehk $aa = a$ ja $bb = b$. Siis

$$\begin{aligned}
ab = ab =&> && (a,\ b \text{ on idempotendid ehk } aa = a \text{ ja } bb = b)\\
=> (aa)b = a(bb) =&> && (\text{poolrühmas on korrutamine assotsiatiivne})\\
=> a(ab) = a(bb) =&> && (\text{vasakult taandamine})\\
=> ab = bb =&> && (\text{paremalt taandamine})\\
=> a = b
\end{aligned}$$

Seega kuna siis a ja b langevad kokku, siis on poolrühmas S ülimalt üks idempotent.

Teiseks näitame, et kui e on idempotent, siis on e ühikelement ehk $\forall a \in S\ ae = a = ea$. Olgu $a \in S$ suvaline element, siis:

$$\begin{aligned}
ea = ea =&> && (a,\ b \text{ on idempotendid ehk } aa = a \text{ ja } bb = b)\\
=> (ee)a = ea =&> && (\text{poolrühmas on korrutamine assotsiatiivne})\\
=> e(ea) = ea =&> && (\text{vasakult taandamine})\\
=> ea = a =&>
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
ae = ae =&> && (a,\ b \text{ on idempotendid ehk } aa = a \text{ ja } bb = b)\\
=> a(ee) = ae =&> && (\text{poolrühmas on korrutamine assotsiatiivne})\\
=> (ae)e = ae =&> && (\text{paremalt taandamine})\\
=> ae = a =&>
\end{aligned}$$

Seega $ea = a$ ja $ae = a$ ehk $ea = a = ae$, seega e on ühikelement.

2. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Poolrühm S on antud oma Cayley tabeliga

S	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	6	6
2	1	1	1	1	1	6	6
3	1	1	1	1	1	6	6
4	1	1	1	1	1	6	6
5	5	5	5	5	5	7	7
6	1	1	1	1	1	6	6
7	5	5	5	5	5	7	7

Kirjutada elementhaaval üles poolrühma kõik $\mathcal{D}$-klassid ja nende ja nende jaotus $\mathcal{L}$- ja $\mathcal{R}$-klassideks (nn "'munaresti"' diagramm).

- $S1 = \{1,5\}$, $S^1 1 = S1 \cup \{1\} = \{1,5\}$
- $S2 = \{1,5\}$, $S^1 2 = S2 \cup \{2\} = \{1,2,5\}$
- $S3 = \{1,5\}$, $S^1 3 = S3 \cup \{3\} = \{1,3,5\}$
- $S4 = \{1,5\}$, $S^1 4 = S4 \cup \{4\} = \{1,4,5\}$
- $S5 = \{1,5\}$, $S^1 5 = S5 \cup \{5\} = \{1,5\}$
- $S6 = \{6,7\}$, $S^1 6 = S6 \cup \{6\} = \{6,7\}$
- $S7 = \{6,7\}$, $S^1 7 = S7 \cup \{7\} = \{6,7\}$
- $1S = \{1,6\}$, $1S^1 = 1S \cup \{1\} = \{1,6\}$
- $2S = \{1,6\}$, $2S^1 = 2S \cup \{2\} = \{1,2,6\}$
- $3S = \{1,6\}$, $3S^1 = 3S \cup \{3\} = \{1,3,6\}$
- $4S = \{1,6\}$, $4S^1 = 4S \cup \{4\} = \{1,4,6\}$
- $5S = \{5,7\}$, $5S^1 = 5S \cup \{5\} = \{5,7\}$
- $6S = \{1,6\}$, $6S^1 = 6S \cup \{6\} = \{1,6\}$
- $7S = \{5,7\}$, $7S^1 = 7S \cup \{7\} = \{5,7\}$

Seega $S/\mathcal{L} = \{\{1,5\},\{6,7\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ ja $S/\mathcal{R} = \{\{1,6\},\{5,7\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$ ning $S/\mathcal{D} = \{\{1,5,6,7\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

Munarestidigarammidena avalduvad $\mathcal{D}$-klassid seega seega:

- $\{1,5,6,7\}$

	$\{1,5\}$	$\{6,7\}$
$\{1,6\}$	$\{1\}$	$\{6\}$
$\{5,7\}$	$\{5\}$	$\{7\}$

- $\{2\}$

	$\{2\}$
$\{2\}$	$\{2\}$

- $\{3\}$

	$\{3\}$
$\{3\}$	$\{3\}$

- $\{4\}$

	$\{4\}$
$\{4\}$	$\{4\}$

3. ülesanne (Karolina Tammemaa)

Olgu S taandamisega poolrühm, mis sisaldab vähemalt ühte idempotenti. Vastavalt ülesandele 1 on selles poolrühmas ainult 1 idempotent ja see on selle poolrühma ühikelement. Tähistame selle 1-ga. Seega on S monoid. Olgu $a \in S$, näitame et a-l leidub pöördelement. Kuna S on lihtne, siis $SaS = S$ ja seega leiduvad $b, c \in S$ selliselt, et

$$cab = 1$$

Korrutame seda vasakult b-ga ja kasutame seda et S on taandamisega, ning saame:

$$bcab = b \Rightarrow bca = 1$$

Tähsitame $a^{-1} = bc$, siis $a^{-1}a = 1$. Korrutades seda vasakult a-ga ja kasutades taandamist saame sellest, et $aa^{-1}a = a$ võrduse $aa^{-1} = 1$. Seega on a^{-1} elemendi a pöördelement ja kuna a oli valitud vabalt, siis on S rühm.

4. ülesanne

Lahendus (a) (Karolina Tammemaa).

Teame, et $\mathcal{M}$ on täiesti lihtne poolrühm. Kuna $|\mathcal{M}| = p$, siis on poolürhma järk lõplik ja tegu on perioodilise poolrühmaga. Vastavalt Mati Kilbi õpiku teoreemile 7.13 on $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. Olgu $a, b \in \mathcal{M}$, siis kuna $\mathcal{M}$ on lihtne on $\mathcal{M}a\mathcal{M} = \mathcal{M}$ ja $\mathcal{M}b\mathcal{M} = \mathcal{M}$. Seega $a\mathcal{J}b$ ning a ja b on samas $\mathcal{D}$-klassis. Kuna a ja b olid valitud vabalt, siis on kogu poolrühm ühes $\mathcal{D}$-klassis.

Kasutame nüüd Mati Kilbi õpikust järeldust 8.4, mis ütleb et ühte ja samasse $\mathcal{D}$-klassi kuuluvad $\mathcal{L}$- ja $\mathcal{R}$ klassid on sama võimusega. Seega on meil kas 1 $\mathcal{L}$-klass võimsusega p või p $\mathcal{L}$-klass võimsusega 1 (sama kehtib ka $\mathcal{R}$ klasside kohta). Seega on meil kokku 3 võimalust:

1) Meil on üks $\mathcal{L}$-klass võimsusega p ja üks $\mathcal{R}$-klass võimsusega p. Siis on meil ka ainult H-klass, mis on võrdne hulgaga $\mathcal{M}$. Kuna H on rühm, siis on ka $\mathcal{M}$ rühm.

2)Meil on üks $\mathcal{L}$-klass võimsusega p ja p $\mathcal{R}$-klass võimsusega 1. Seega on meil p H-klassi, kusjuures iga H-klass on rühm. Seega on meil p H-klassi: $H_1, ..., H_p$

kus igas on 1 element. Kuna iga H-klass on rühm, siis iga $i \in \{1, ..., p\}$ ja $e_i \in H_i$ korral $e_i e_i = e_i$. Vaatleme suvalisi elemente $k, e_i \in \mathcal{M}$. Kuna kõik H-klassid on samas $\mathcal{L}$-klassis, siis on meil $\mathcal{M}e_i = \mathcal{M}k$ iga i korral. Seega leidub $l \in \mathcal{M}$ nii, et $le_i = k$. Siis

$$k = le_i = l(e_i e_i) = (le_i)e_i = ke_i$$

ja tegu on vasakpoolse nullkorrutamisega poolrühmaga.

3) Meil on üks $\mathcal{R}$-klass võimsusega p ja p $\mathcal{L}$-klass võimsusega 1. Analoogiliselt eelmise punktiga saame nüüd, et meil on parempoolse nullkorrutamisega poolrühm. Meil ei saa olla juhtu, kus on p $\mathcal{R}$-klass võimsusega 1 ja p $\mathcal{L}$-klass võimsusega 1, sest siis meil peaks olema p^2 mittetühja H-klassi, mis on võimatu.

Lahendus (b) (Nikita Leo).

Kuna $\mathcal{M} = I \times G \times \Lambda$, siis $|\mathcal{M}| = |I| \times |G| \times |\Lambda|$ ehk $|I| \times |G| \times |\Lambda| = p$. Kuna p on algarv ning $|I|$, $|G|$ ja $|\Lambda|$ on positiivsed täisarvud, siis on olemas kolm võimalust.

1. $|I| = p$, $|G| = 1$, $|\Lambda| = 1$
2. $|I| = 1$, $|G| = p$, $|\Lambda| = 1$
3. $|I| = 1$, $|G| = 1$, $|\Lambda| = p$

Osutub, et juhul 1 on tegemist vasakpoolse nullkorrutamisega poolrühmaga, juhul 2 on tegemist rühmaga ning juhul 3 on tegemist parempoolse nullkorrutamisega poolrühmaga.

Vaatleme kõigepealt esimest juhtu. Tähistagu e rühma G ainsat elementi ning λ hulga Λ ainsat elementi. Siis hulga $\mathcal{M}$ kõik elemendid on kujul (i, e, λ), kus $i \in I$. Olgu $i \in I$ ja $j \in I$. Leiame korrutise $(i, e, \lambda)(j, e, \lambda)$. Teame, et korrutis esitub kujul (k, e, λ), kus $k \in I$. Arvestades, kuidas korrutamine poolrühmas $\mathcal{M}$ on defineeritud, võime öelda, et $k = i$. Niisiis $(i, e, \lambda)(j, e, \lambda) = (i, e, \lambda)$. Seega iga $m \in \mathcal{M}$ ja $n \in \mathcal{M}$ korral $mn = m$ ehk $\mathcal{M}$ on vasakpoolse nullkorrutamisega poolrühm. Analoogiliselt võib veenduda, et kolmanda juhu korral $\mathcal{M}$ on parempoolse nullkorrutamisega poolrühm.

Lõpuks vaatleme teist juhtu. Tähistagu i hulga I ainsat elementi ning λ hulga Λ ainsat elementi. Siis hulga $\mathcal{M}$ kõik elemendid on kujul (i, g, λ), kus $g \in G$. Tähistagu e rühma G ühikelementi ja g^{-1} elemendi $g \in G$ pöördelementi rühmas G. Hulga $\mathcal{M}$ elemendid võime loomulikul viisil samastada rühma G elementidega. Vastav bijektsioon on $\varphi : G \to \mathcal{M}$, $g \mapsto (i, g, \lambda)$. Järgnevas tähistab järjestkirjutamine rühma G tehet ja $*$ poolrühma $\mathcal{M}$ tehet. Tähistame $m = p_{\lambda i}$. Poolrühma $\mathcal{M}$ korrutamine on kirjeldatav seosega

$$g * h = gmh, \quad g, h \in G.$$

Tõestame, et $(G, *)$ on rühm.

- Veendume, et tehe $*$ on assotsiatiivne. Olgu $g, h, k \in G$ suvalised, siis

$$(g * h) * k = (gmh) * k = gmhmk = g * (hmk) = g * (h * k).$$

  Niisiis tehe $*$ on tõepoolest assotsiativne. Tegelikult tehte $*$ assotsiatiivsus on tõestatud üldjuhul lemmas 6.42.

- Veendume, et m^{-1} on ühikelement tehte $*$ suhtes. Olgu $g \in G$ suvaline, siis $g * m^{-1} = gmm^{-1} = g$ ning $m^{-1} * g = m^{-1}mg = g$.

- Olgu $g \in G$ suvaline. Veendume, et $m^{-1}g^{-1}m^{-1}$ on elemendi g pöördelement tehte $*$ suhtes.

$$g * (m^{-1}g^{-1}m^{-1}) = gmm^{-1}g^{-1}m^{-1} = gg^{-1}m^{-1} = m^{-1}$$
$$(m^{-1}g^{-1}m^{-1}) * g = m^{-1}g^{-1}m^{-1}mg = m^{-1}g^{-1}g = m^{-1}$$

Sellega on tõestatud, et $\mathcal{M}$ on rühm.

5. ülesanne (Urmas Luhaäär)

Olgu S regulaarne ja kommutatiivne poolrühm. Olgu $x \in S$ suvaline. Siis leidub regulaarsuse tõttu selline $y \in S$, et $xyx = x$. Olgu $z = yxy$. Siis $xzx = xyxyx = xyx = x$ ja $zxz = yxyxyxy = yxyxy = yxy = z$. Ehk $zxz = z$ ja $xzx = x$. Kuna $(xz)^2 = xzxz = xz$, siis $xz = zx$ on idempotent.

Näitame, et $G_{x,z} = \{x^n z^m | m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, m > 0 \vee n > 0\}$ on rühm(siin interpreteerime x^0 selliselt, et elementi x justkui poleks korrutises). Ilmselt on see hulk korrutamise all kinnine ja ilmselt on korrutamine assotsiatiivne. Näeme, et $G_{x,z}$ on poolrühm. Näitame, et xz, on selle poolrühma ühik. Üldisust kitsendamata avaldises $x^n z^m$ $n > 0$. Siis $(x^n z^m)(xz) = x^{n+1}z^{n+1} = x^{n-1}z^m(xzx) = x^n z^m$.

Olgu $x^n z^m \in G_{x,z}$, kus üldisust kitsendamata $n \geq m$. Siis selle elemndi pöördelemendiks on element z^{n-m}, sest

$$x^n z^m \cdot z^{n-m} = x^n z^n = xz.$$

Viimane võrdus kehtib elemendi xz idempotentsuse(ja poolrühma kommutatiivsuse) tõttu.

Oleme näidanud, et $G_{x,y}$ rahuldab kõiki rühma aksioome ja on seega rühm, kusjuures $x \in G_{x,y}$.

Kuna saame leida iga hulga S elemndi jaoks sellise rühma, kuhu ta kuulub(mis on hulga S alamhulk), siis on poolrühm S nende rühmade ühend.

6. ülesanne (Urmas Luhaäär)

Peame näitama, et niimodi defineeritud korrutamine on assotsiatiivne. Olgu $a, b, c \in A$.

$$a * (b * c) = a * (b \cdot f(c)) = a \cdot f(b \cdot f(c)) =$$

$$a \cdot (f(b) \cdot f(c)) = (a \cdot f(b)) \cdot f(c) = (a * b) \cdot f(c) = (a * b) * c.$$

Kolmas võrdus kehtib, kuna f on polügoonide homomorfism.

1. On teada, et naturaalarvud korrtuamise all on monoid ühikuga 1. Vaatame samasusteisendust
$$I \colon \mathbb{N}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}_{\mathbb{N}}.$$
See on polügoonide homomorfism, sest $I(ab) = ab = I(a)I(b)$. Iga $a, b \in \mathbb{N}$ korral $a * b = a \cdot I(b) = a \cdot b$, kusjuures $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, ehk tekkinud poolrühmas on ühik, ehk see on monoid.

2. Kuna iga $a, b \in \mathbb{N}$ korral $ab = 1 \implies a = b = 1$, siis arvu 1 eemaldamisel jääb $\mathbb{N}$ korrutamise all kinniseks(isegi kui midagi ühega korrutada). Kuna naturaalarvude korrutamine on assotsiatiivne, saame seda hulka vaadata polügoonina $(\mathbb{N} \setminus \{1\})_{\mathbb{N}}$. Teeme nagu ennegi ühikteisenduse
$$I \colon (\mathbb{N} \setminus \{1\})_{\mathbb{N}} \to (\mathbb{N} \setminus \{1\})_{\mathbb{N}}.$$
Nagu ennegi on tegu polügoonide homomorfismiga. Seega on $((\mathbb{N}\setminus\{1\})_{\mathbb{N}}, *)$ poolrühm. Näeme, et $a*b = a \cdot I(b) = a \cdot b$. Kuna iga $n \in (\mathbb{N}\setminus\{1\})_{\mathbb{N}}$ korral $n \cdot n \neq n$, siis ei leidu selles poolrühmas idempotenti. Kuna aga ühik peab olema idempotentne, siis ei ole selles poolrühmas ühikut.

7. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Tõestada, et lihtne polügoon on alati taandumatu. Kas kehtib ka vastupidine väide, st iga taandumatu polünoom on lihtne.

Olgu A_S lihtne polügoon, st tal ei ole pärisalampolügoone. Oletame vastuväiteliselt, et A_S ei ole taandumatu, seega esitub A_S kahe mittetühja alampolügooni ühendina ehk $A_S = B_S \sqcup C_S$, kus $B_S, C_S \neq \emptyset$. Seega on B_S ja C_S mõlemad polügooni A_S pärisalampolügoonid ehk saame vastuolu eeldusega, et A_S on lihtne polügoon.

Vastupidine väide, et iga taandumatu polünoom on lihtne, ei kehti, kuna leidub vastav kontranäide:

Olgu monoid $S = \{1, a\}$, antud Cayley tabeliga

	1	a
1	1	a
a	a	a

Siis polügoon S_S ei ole lihtne polügoon, kuna leidub pärisalampolügoon $\{a\}$, aga on taandumatu polügoon (ainus võimalus esitada S_S kahe mittetühja hulga ühendina on $A_S = \{1\} \sqcup \{a\}$, samas aga $\{1\}$ ei ole alampolügoom, kuna $1a = a \notin \{1\}$).

8. ülesanne (Martin Puškin)

Vaatame monoidi $S = (\{1, 2, 3\}, *)$, mis on defineeritud järgmise Cayley tabeliga

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	2	3
3	3	3	2

Olgu $A = \{1, 2\}$. Vaatame monoidi A_S, mille Cayley tabel on järgmine:

$a \in A \setminus s \in S$	1	2	3
1	1	1	2
2	2	2	1

Täheldame, et $A_S \cong 2S$. Kuna 2 on S idempotent, siis loengukonspekti teoreemi 7.19 järgi on A_S projektiivne. Ilmselt ei ole A_S vaba, sest kui $a \in A$ oleks baasielement, oleks $a1 = a2$, mis on vastuolu baasi ühesusega.

Teiseks näiteks sobib polügoon $B_S = B_1 \sqcup B_2$, kus $B_1 \cong B_2 \cong 2S$. Selle Cayley tabel on järgmine:

$b \in B \setminus s \in S$	1	2	3
1	1	1	2
2	2	2	1
3	3	3	4
4	4	4	3

Taas on see projektiivne teoreemi 7.19 järgi, kuid pole eelnevaga samal põhjusel vaba.