Sissejuhatus algebra struktuuridesse
5. praktikum

Näidislahendused

1. ülesanne (Nikita Leo)

Loetleme A_4 alamrühmad.

a. $\{\varepsilon\}$

b. $\{\varepsilon,\ (12)(34)\}$

c. $\{\varepsilon,\ (13)(24)\}$

d. $\{\varepsilon,\ (14)(23)\}$

e. $\{\varepsilon,\ (234),\ (243)\}$

f. $\{\varepsilon,\ (134),\ (143)\}$

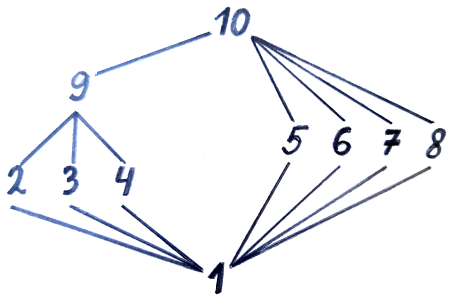
g. $\{\varepsilon,\ (124),\ (142)\}$

h. $\{\varepsilon,\ (123),\ (132)\}$

i. $\{\varepsilon,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$

j. A_4

Joonistame Hasse diagrammi.



Tegemist on võrega, sest igal kahel elemendil leidub ülemine ja alumine raja. Kahe alamrühma alumiseks rajaks on nende ühisosa, alamrühmade H_1 ja H_2 ülemiseks rajaks on nende korrutis

$$H_1H_2 = \{xy : x \in H_1, y \in H_2\}.$$

See võre ei ole modulaarne, sest sisaldab alamvõret $\{1, 4, 5, 9, 10\}$, mis on isomorfne võrega N_5. Lemma 8.16 kohaselt iga distributiivne võre on modulaarne. Kuna vaadeldav võre ei ole modulaarne, siis ta ei ole ka distributiivne. Vaadeldav võre on lõplik, seega täielik.

2. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Tõestame, et täielike võrede mistahes võimsusega otsekorrutis on ise ka täielik võre. Olgu V_i, $i \in I$ täielikud võred; näitame, et

$$V = \prod_{i \in I} V_i$$

on ka täielik võre. Vastavalt algebrate otsekorrutise definitsioonile on tehted $\wedge$ ja $\vee$ defineeritud punktiviisiliselt, s.t.

$$\begin{aligned}(a_i)_{i\in I} \vee (b_i)_{i\in I} &= (a_i \vee b_i)_{i\in I};\\ (a_i)_{i\in I} \wedge (b_i)_{i\in I} &= (a_i \wedge b_i)_{i\in I}.\end{aligned}$$

Vastavalt loengukonspekti konstruktsioonile

$$\begin{aligned}(a_i)_{i\in I} \leqslant (b_i)_{i\in I} &\iff (a_i)_{i\in I} = (a_i)_{i\in I} \wedge (b_i)_{i\in I}\\ &\iff (a_i)_{i\in I} = (a_i \wedge b_i)_{i\in I}\\ &\iff \forall i \in I\colon\ a_i = a_i \wedge b_i\\ &\iff \forall i \in I\colon\ a_i \leqslant b_i.\end{aligned}$$

Olgu $U \subset V$; näitame, et hulgal U leidub võres V alumine raja. Tähistame iga $i \in I$ korral

$$U_i = \{a_i \mid (a_j)_{j\in I} \in U\}.$$

Siis $U_i \subset V_i$ ehk tal leidub alumine raja u_i. Vaatleme elementi $u = (u_i)_{i\in I}$. Näitame, et u on hulga U alumine raja.

Esiteks veendume, et u on hulga U alumine tõke. Olgu $(a_i)_{i\in I} \in U$. Iga i korral $a_i \in U_i$; et u_i on alumine tõke, siis $u_i \leqslant a_i$. Järelikult $u = (u_i)_{i\in I} \leqslant (a_i)_{i\in I}$.

Nüüd näitame, et u on suurim alumine tõke. Olgu $v = (v_i)_{i\in I} \in V$ hulga U mingi alumine tõke. Siis iga $i \in I$ ja $a = (a_i)_{i\in I} \in U$ korral $v_i \leqslant a_i$ ehk v_i on U_i alumine tõke. Et u_i on U_i suurim alumine tõke, siis $v_i \leqslant u_i$. Järelikult $v \leqslant u$ ehk u on alumine raja.

Ülemise raja olemasolu tõestus on duaalne.

3. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Tõestame, et täienditega distributiivses võres on täiendid üheselt määratud.

Olgu V distributiivne võre ja olgu $a \in V$. Olgu $x, y \in V$ mõlemad a täiendid, näitame, et $x = y$.

Kuna $x, y \in V$ on täiendid, siis $a \vee x = a \vee y = 1$ ning $a \wedge x = a \wedge y = 0$. Täiendi ühesuseks näitame siis, et $x = y$.

$$
\begin{aligned}
x &= (x \vee a) \wedge x = && \text{(neelduvus)}\\
&= (y \vee a) \wedge x && (x, y \text{ on täiendid ehk } y \vee a = x \vee a = 1 \text{ ja kommutatiivsus})\\
&= (y \wedge x) \vee (a \wedge x) && \text{(distributiivsus)}\\
&= (y \wedge x) \vee (a \wedge y) && (x, y \text{ on täiendid ehk } a \wedge x = a \wedge y = 0)\\
&= (x \wedge y) \vee (a \wedge y) && \text{(kommutatiivsus)}\\
&= (x \vee a) \wedge y && \text{(distributiivsus)}\\
&= (y \vee a) \wedge y && (x, y \text{ on täiendid ehk } y \vee a = x \vee a = 1 \text{ ja kommutatiivsus})\\
&= y && \text{(neelduvus)}
\end{aligned}
$$

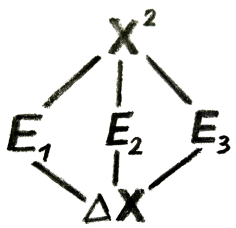
4. ülesanne (Nikita Leo)

Tõestame, et võre $Eq(X)$ on modulaarne parajasti siis, kui $|X| \leq 3$. Teoreemist 8.14 teame, et võre on modulaarne parajasti siis, kui see ei sisalda võrega N_5 isomorfset alamvõret. Muuhulgas tähendab see, et võre, milles on vähem kui 5 elementi, on modulaarne. Kõigepealt veendume, et $|X| = 0, 1, 2, 3$ korral võre $Eq(X)$ on modulaarne. Järgnevas tähistab ΔX hulka $\{(x, x) : x \in X\}$.

- Olgu $X = \emptyset$, siis $Eq(X) = \{\emptyset\}$ on modulaarne, sest sisaldab vähem kui 5 elementi.
- Olgu $|X| = \{1\}$, siis $Eq(X) = \{\{(1, 1)\}\}$ on modulaarne, sest sisaldab vähem kui 5 elementi.
- Olgu $|X| = \{1, 2\}$, siis $Eq(X) = \{\Delta X,\ X^2\}$ on modulaarne, sest sisaldab vähem kui 5 elementi.
- Olgu $|X| = \{1, 2, 3\}$, siis $Eq(X) = \{\Delta X,\ E_1,\ E_2,\ E_3,\ X^2\}$, kus

  $$
  \begin{aligned}
  E_1 &= \{(1, 1)\} \cup \{2, 3\}^2\\
  E_2 &= \{(2, 2)\} \cup \{1, 3\}^2\\
  E_3 &= \{(3, 3)\} \cup \{1, 2\}^2
  \end{aligned}
  $$

  Kui $Eq(X)$ ei oleks modulaarne, siis see sisaldaks võrega N_5 isomorfset alamvõret. Kuna $|Eq(X)| = 5$, siis viimane on võimalik vaid juhul, kui $Eq(X)$ oleks ise isomorfne N_5-ga. On lihtne veenduda, et $Eq(X)$ ei ole isomorfne N_5-ga, seega $Eq(X)$ on modulaarne.



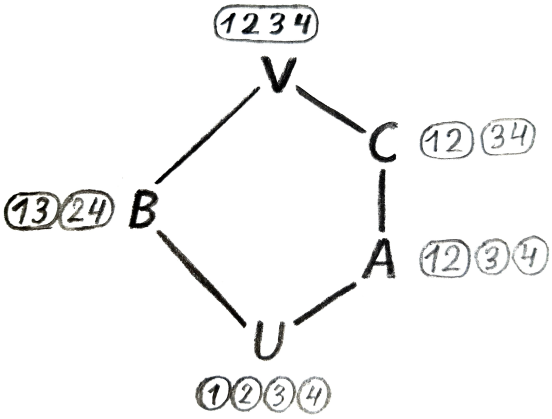
Nüüd veendume, et kui X sisaldab vähemalt neli elementi, siis $Eq(X)$ ei ole modulaarne. Olgu x_1, x_2, x_3, x_4 hulga X neli erinevat elementi. Tähistame

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

Olgu $\mathcal{E}$ suvaline ekvivalentsusseos hulgal $X \setminus M$ (näiteks $\Delta(X \setminus M)$ või $(X \setminus M)^2$). Vaatleme hulgal X järgmisi ekvivalentsusseoseid.

$$
\begin{aligned}
U &= \mathcal{E} \cup \{x_1\}^2 \cup \{x_2\}^2 \cup \{x_3\}^2 \cup \{x_4\}^2 \\
A &= \mathcal{E} \cup \{x_1, x_2\}^2 \cup \{x_3\}^2 \cup \{x_4\}^2 \\
C &= \mathcal{E} \cup \{x_1, x_2\}^2 \cup \{x_3, x_4\}^2 \\
B &= \mathcal{E} \cup \{x_1, x_3\}^2 \cup \{x_2, x_4\}^2 \\
V &= \mathcal{E} \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4\}^2
\end{aligned}
$$

Hulk $S = \{U, A, B, C, V\} \subset Eq(X)$ on kinnine ülemise ja alumise raja võtmise suhtes, seega on alamvõre. See võre on isomorfne võrega N_5. Kuna $Eq(X)$ sisaldab alamvõret, mis on isomorfne võrega N_5, siis $Eq(X)$ ei ole modulaarne.



5. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Olgu $\Omega = \Omega_2 = \{\vee, \wedge\}$ võre signatuur ja $X = \{x, y\}$. Leiame kõik esimese ja teise astme Ω-termid.

Koostame tabeli nullinda, esimese ja teise astme (Ω, X)-termidest. Vastavalt definitsioonile on nullinda astme termid x ja y. Iga järgmise astme termid saame konstrueerida nii: võtame eelmistest ridadest kaks (Ω, X)-termi, kusjuures vähemalt üks nendest eelmisest reast, ja paneme nende vahele sümboli $\vee$. Sama kordame sümboliga $\wedge$.

0-astme termid	x, y
1-astme termid	$x \vee x$, $x \vee y$, $y \vee x$, $y \vee y$, $x \wedge x$, $x \wedge y$, $y \wedge x$, $y \wedge y$
2-astme termid	$x \vee (x \vee x)$, $x \vee (x \vee y)$, $x \vee (y \vee x)$, $x \vee (y \vee y)$, $x \vee (x \wedge x)$, $x \vee (x \wedge y)$, $x \vee (y \wedge x)$, $x \vee (y \wedge y)$, $y \vee (x \vee x)$, $y \vee (x \vee y)$, $y \vee (y \vee x)$, $y \vee (y \vee y)$, $y \vee (x \wedge x)$, $y \vee (x \wedge y)$, $y \vee (y \wedge x)$, $y \vee (y \wedge y)$, $(x \vee x) \vee (x \vee x)$, $(x \vee x) \vee (x \vee y)$, $(x \vee x) \vee (y \vee x)$, $(x \vee x) \vee (y \vee y)$, $(x \vee x) \vee (x \wedge x)$, $(x \vee x) \vee (x \wedge y)$, $(x \vee x) \vee (y \wedge x)$, $(x \vee x) \vee (y \wedge y)$, $(x \vee x) \vee x$, $(x \vee x) \vee y$, $(x \vee y) \vee (x \vee x)$, $(x \vee y) \vee (x \vee y)$, $(x \vee y) \vee (y \vee x)$, $(x \vee y) \vee (y \vee y)$, $(x \vee y) \vee (x \wedge x)$, $(x \vee y) \vee (x \wedge y)$, $(x \vee y) \vee (y \wedge x)$, $(x \vee y) \vee (y \wedge y)$, $(x \vee y) \vee x$, $(x \vee y) \vee y$, $(y \vee x) \vee (x \vee x)$, $(y \vee x) \vee (x \vee y)$, $(y \vee x) \vee (y \vee x)$, $(y \vee x) \vee (y \vee y)$, $(y \vee x) \vee (x \wedge x)$, $(y \vee x) \vee (x \wedge y)$, $(y \vee x) \vee (y \wedge x)$, $(y \vee x) \vee (y \wedge y)$, $(y \vee x) \vee x$, $(y \vee x) \vee y$, $(y \vee y) \vee (x \vee x)$, $(y \vee y) \vee (x \vee y)$, $(y \vee y) \vee (y \vee x)$, $(y \vee y) \vee (y \vee y)$, $(y \vee y) \vee (x \wedge x)$, $(y \vee y) \vee (x \wedge y)$, $(y \vee y) \vee (y \wedge x)$, $(y \vee y) \vee (y \wedge y)$, $(y \vee y) \vee x$, $(y \vee y) \vee y$, $(x \wedge x) \vee (x \vee x)$, $(x \wedge x) \vee (x \vee y)$, $(x \wedge x) \vee (y \vee x)$, $(x \wedge x) \vee (y \vee y)$, $(x \wedge x) \vee (x \wedge x)$, $(x \wedge x) \vee (x \wedge y)$, $(x \wedge x) \vee (y \wedge x)$, $(x \wedge x) \vee (y \wedge y)$, $(x \wedge x) \vee x$, $(x \wedge x) \vee y$, $(x \wedge y) \vee (x \vee x)$, $(x \wedge y) \vee (x \vee y)$, $(x \wedge y) \vee (y \vee x)$, $(x \wedge y) \vee (y \vee y)$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge x)$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge y)$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge x)$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge y)$, $(x \wedge y) \vee x$, $(x \wedge y) \vee y$, $(y \wedge x) \vee (x \vee x)$, $(y \wedge x) \vee (x \vee y)$, $(y \wedge x) \vee (y \vee x)$, $(y \wedge x) \vee (y \vee y)$, $(y \wedge x) \vee (x \wedge x)$, $(y \wedge x) \vee (x \wedge y)$, $(y \wedge x) \vee (y \wedge x)$, $(y \wedge x) \vee (y \wedge y)$, $(y \wedge x) \vee x$, $(y \wedge x) \vee y$, $(y \wedge y) \vee (x \vee x)$, $(y \wedge y) \vee (x \vee y)$, $(y \wedge y) \vee (y \vee x)$, $(y \wedge y) \vee (y \vee y)$, $(y \wedge y) \vee (x \wedge x)$, $(y \wedge y) \vee (x \wedge y)$, $(y \wedge y) \vee (y \wedge x)$, $(y \wedge y) \vee (y \wedge y)$, $(y \wedge y) \vee x$, $(y \wedge y) \vee y$, $x \wedge (x \vee x)$, $x \wedge (x \vee y)$, $x \wedge (y \vee x)$, $x \wedge (y \vee y)$, $x \wedge (x \wedge x)$, $x \wedge (x \wedge y)$, $x \wedge (y \wedge x)$, $x \wedge (y \wedge y)$, $y \wedge (x \vee x)$, $y \wedge (x \vee y)$, $y \wedge (y \vee x)$, $y \wedge (y \vee y)$, $y \wedge (x \wedge x)$, $y \wedge (x \wedge y)$, $y \wedge (y \wedge x)$, $y \wedge (y \wedge y)$, $(x \vee x) \wedge (x \vee x)$, $(x \vee x) \wedge (x \vee y)$, $(x \vee x) \wedge (y \vee x)$, $(x \vee x) \wedge (y \vee y)$, $(x \vee x) \wedge (x \wedge x)$, $(x \vee x) \wedge (x \wedge y)$, $(x \vee x) \wedge (y \wedge x)$, $(x \vee x) \wedge (y \wedge y)$, $(x \vee x) \wedge x$, $(x \vee x) \wedge y$, $(x \vee y) \wedge (x \vee x)$, $(x \vee y) \wedge (x \vee y)$, $(x \vee y) \wedge (y \vee x)$, $(x \vee y) \wedge (y \vee y)$, $(x \vee y) \wedge (x \wedge x)$, $(x \vee y) \wedge (x \wedge y)$, $(x \vee y) \wedge (y \wedge x)$, $(x \vee y) \wedge (y \wedge y)$, $(x \vee y) \wedge x$, $(x \vee y) \wedge y$, $(y \vee x) \wedge (x \vee x)$, $(y \vee x) \wedge (x \vee y)$, $(y \vee x) \wedge (y \vee x)$, $(y \vee x) \wedge (y \vee y)$, $(y \vee x) \wedge (x \wedge x)$, $(y \vee x) \wedge (x \wedge y)$, $(y \vee x) \wedge (y \wedge x)$, $(y \vee x) \wedge (y \wedge y)$, $(y \vee x) \wedge x$, $(y \vee x) \wedge y$, $(y \vee y) \wedge (x \vee x)$, $(y \vee y) \wedge (x \vee y)$, $(y \vee y) \wedge (y \vee x)$, $(y \vee y) \wedge (y \vee y)$, $(y \vee y) \wedge (x \wedge x)$, $(y \vee y) \wedge (x \wedge y)$, $(y \vee y) \wedge (y \wedge x)$, $(y \vee y) \wedge (y \wedge y)$, $(y \vee y) \wedge x$, $(y \vee y) \wedge y$, $(x \wedge x) \wedge (x \vee x)$, $(x \wedge x) \wedge (x \vee y)$, $(x \wedge x) \wedge (y \vee x)$, $(x \wedge x) \wedge (y \vee y)$, $(x \wedge x) \wedge (x \wedge x)$, $(x \wedge x) \wedge (x \wedge y)$, $(x \wedge x) \wedge (y \wedge x)$, $(x \wedge x) \wedge (y \wedge y)$, $(x \wedge x) \wedge x$, $(x \wedge x) \wedge y$, $(x \wedge y) \wedge (x \vee x)$, $(x \wedge y) \wedge (x \vee y)$, $(x \wedge y) \wedge (y \vee x)$, $(x \wedge y) \wedge (y \vee y)$, $(x \wedge y) \wedge (x \wedge x)$, $(x \wedge y) \wedge (x \wedge y)$, $(x \wedge y) \wedge (y \wedge x)$, $(x \wedge y) \wedge (y \wedge y)$, $(x \wedge y) \wedge x$, $(x \wedge y) \wedge y$, $(y \wedge x) \wedge (x \vee x)$, $(y \wedge x) \wedge (x \vee y)$, $(y \wedge x) \wedge (y \vee x)$, $(y \wedge x) \wedge (y \vee y)$, $(y \wedge x) \wedge (x \wedge x)$, $(y \wedge x) \wedge (x \wedge y)$, $(y \wedge x) \wedge (y \wedge x)$, $(y \wedge x) \wedge (y \wedge y)$, $(y \wedge x) \wedge x$, $(y \wedge x) \wedge y$, $(y \wedge y) \wedge (x \vee x)$, $(y \wedge y) \wedge (x \vee y)$, $(y \wedge y) \wedge (y \vee x)$, $(y \wedge y) \wedge (y \vee y)$, $(y \wedge y) \wedge (x \wedge x)$, $(y \wedge y) \wedge (x \wedge y)$, $(y \wedge y) \wedge (y \wedge x)$, $(y \wedge y) \wedge (y \wedge y)$, $(y \wedge y) \wedge x$, $(y \wedge y) \wedge y$

6. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Olgu $f\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ja $g\colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ universaalalgebrate homomorfismid, $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$ ja g sürjektiivne. Tõetsame, et leidub homomorfism $h\colon \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ nii, eg $f = hg$.

Defineerime kujutuse $h\colon C \to B$ järgnevalt. Olgu $x \in C$; et g on sürjektiivne, siis leidub $a \in A$ nii, et $g(a) = x$. Defineerime siis $h(x) = f(a)$.

Veendume, et h on korrektselt defineeritud. Olgu $x \in C$, kusjuures $a, b \in A$ on sellised, et $g(a) = g(b) = x$. Et h oleks korrektselt defineeritud peame veenduma, et $f(a) = f(b)$. See on vahetu järeldus sellest, et $\mathrm{Ker}(g) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. On ilmne, et kehtib $f = hg$.

Viimaks näitame, et h on universaalalgebrate homomorfism. Olgu $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $x_1, \ldots, x_n \in C$. Et g on sürjektiivne, siis leiduvad originaalid $a_1, \ldots, a_n \in A$ nii, et iga i korral $g(a_i) = x_i$. Saame

$$\begin{aligned}
h(\omega_C(x_1, \ldots, x_n) &= h(\omega_C(g(a_1), \ldots, g(a_n))) \\
&= h(g(\omega_A(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= f(\omega_A(a_1, \ldots, a_n)) \\
&= \omega_B(f(a_1), \ldots, f(a_n)) \\
&= \omega_B(h(g(a_1)), \ldots, h(g(a_n))) \\
&= \omega_B(h(x_1), \ldots, h(x_n)).
\end{aligned}$$

Olgu $\omega \in \Omega_0$. Näitame, et $h(0_\omega^C) = 0_\omega^B$. Et g on homomorfism, siis $g(0_\omega^A) = 0_\omega^C$. Saame

$$h(0_\omega^C) = g(h(0_\omega^A)) = f(0_\omega^A) = 0_\omega^B.$$

7. ülesanne (Lahenduse autor on toimetusele teada)

Tõestame, et mistahes universaalalgebra $\mathbf{A}$ jaoks leidub universaalalgebra $\mathbf{B}$ nii, et $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Sub}(\mathbf{B})$.

Olgu $\mathbf{A}$ suvaline universaalalgebra; tähistame tema tüüpi sümboliga Ω. Defineerime algebra $\mathbf{B}$ järgmiselt. Põhihulk on $B = A \times A$; Tüüp on Ω', kus

$$\begin{aligned}
&\Omega'_0 = \{1_a \mid a \in A\}; \\
&\Omega'_1 = \Omega_1 \sqcup \{(-)^{-1}\}; \\
&\Omega'_2 = \Omega_2 \sqcup \{\circ\}; \\
&\Omega'_n = \Omega_n \text{ iga } n \geqslant 3 \text{ korral.}
\end{aligned}$$

Tehted on defineeritud järgmiselt:

- Iga $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in B$ korral
$$\omega_B((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (\omega_A(a_1, \ldots, a_n), \omega_A(b_1, \ldots, b_n)).$$
- Iga 1_a, $a \in A$ korral
$$0_{1_a}^B = (a, a).$$
- Iga $(a, b) \in B$ korral
$$(a, b)^{-1} = (b, a).$$

- Iga $(a,b),(c,d) \in B$ korral

$$(a,b) \circ (c,d) = \begin{cases} (a,d), & \text{kui } b = c; \\ (a,b), & \text{muudel juhtudel.} \end{cases}$$

Näitame, et $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Sub}(\mathbf{B})$. Olgu $R \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$ kongruents, siis $R \subset A \times A = B$. Näitame, et alamhulk R on $\mathbf{B}$ tehete suhtes kinnine.

- Olgu $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in R$; siis $a_1Rb_1,\ldots a_nRb_n$. Et R on $\mathbf{A}$ tehetega kooskõlas saame, et

$$\omega_A(a_1,\ldots,a_n)R\omega_A(b_1,\ldots,b_n)$$

  ehk

$$\omega_B((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) = (\omega_A(a_1,\ldots,a_n),\omega_A(b_1,\ldots,b_n)) \in R.$$

- Olgu $a \in A$, näitame, et $0^B_{1_a} \in R$. Tõepoolest, et R on refleksiivne, siis aRa ehk $0^B_{1_a} = (a,a) \in R$.
- Olgu $(a,b) \in R$; näitame, et $(a,b)^{-1} \in R$. Et R on sümmeetriline, siis aRb kehtivusest saame bRa, mis tähendab, et $(a,b)^{-1} = (b,a) \in R$.
- Olgu $(a,b),(c,d) \in R$. Näitame, et $(a,b)\circ(c,d) \in R$. Kui $b \neq c$, siis $(a,b)\circ(c,d) = (a,b) \in R$. Kui $b = c$, siis $(a,b) \circ (c,d) = (a,d)$. Et $(a,b) \in R$ ja $(b,d) \in R$, siis R transitiivsuse tõttu tõepooolest $(a,d) \in R$.

Seega $R \in \mathrm{Sub}(\mathbf{B})$.

Näitame, et $\mathrm{Sub}(\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Olgu $R \in \mathrm{Sub}(\mathbf{B})$ alamalgebra. Näitame, et vaadelduna seosena on ta kongruents.

- *Refleksiivsus.* Olgu $a \in A$ ja näitame, et aRa. Et R on alamalgebra, siis $0^B_{1_a} = (a,a) \in R$.
- *Sümmeetria.* Olgu $(a,b) \in R$. Näitame, et $(b,a) \in R$. Et R on alamalgebra, siis $(a,b)^{-1} = (b,a) \in R$.
- *Transitiivsus.* Olgu $(a,b),(b,c) \in R$. Näitame, et $(a,c) \in R$. Et R on alamalgebra, siis $(a,b) \circ (b,c) = (a,c) \in R$.
- *Kooskõla tehetega.* Olgu $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\omega \in \Omega_n$ ja $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in A$, kusjuures $(a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n) \in R$. Siis et R on alamalgebra,

$$\omega_B((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) = (\omega_A(a_1,\ldots,a_n),\omega_A(b_1,\ldots,b_n)) \in R.$$

Seega $R \in \mathrm{Con}(\mathbf{A})$. Järelikult $\mathrm{Con}(\mathbf{A}) = \mathrm{Sub}(\mathbf{B})$.

8. ülesanne (Martin Puškin)

Näeme, et S on kommutatiivne, assotsiatiivne ja kehtib, et $x^3 = x^4$ (kust $x^k = x^3\,\forall k \geq 3$). Seega on igal muutkonnal, mis sisaldab poolrühma S, need samasused. Täheldame, et poolrühmas S ei kehti samasused

$$x^2 = x,$$
$$x^3 = x,$$
$$x^3 = x^2,$$

sest valides $x = 2$ saame igal juhul vastuolu.

Oletame, et poolrühmal S on veel mingi samasus, nt

$$t_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv t_2(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Täheldame, et kuna meil on kommutatiivsus ja assotsiatiivsus, on samasus kujul

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m} \equiv x_1^{l_1} x_2^{l_2} \ldots x_p^{l_p}, \tag{1}$$

kus $k_i, l_i \in \mathbb{N}$ ning üldistust kitsendamata $m \leq p \leq n$.

Täheldame, et poolrühm S on tegelikult monoid ühikelemendiga 3. Valime nüüd samasuses (1) muutuja x_1 väärtuseks 2 ja ülejäänud muutujate väärtuseks 3. Siis saame, et $2^{k_1} = 2^{l_1}$, kust järeldame, et kas $k_1, l_1 \geq 3$ või $k_1 = l_1$. Analoogselt saame iga k_i, l_i jaoks, kus $i, j \leq m$. Seega samasuse $x^3 = x^4$ tõttu $x_i^{k_i} = x_i^{l_i}, \forall i \leq m$.

Olgu nüüd $p > m$. Võtame $x_i = 3, \forall i \leq m$ ja $x_{m+1} = 0$. Siis on vasakpoolse termi väärtus 3, kuid parempoolse väärtus 0. Seega samasus ei kehti ja saame, et $p = m$. Kokkuvõttes järeldasime, et see samasus on tuletatav etteantud samasustest ja järelikult ongi S poolt tekitatud muutkonnas täpselt sellised poolrühmad, mis täidavad antud samasusi.