Sissejuhatus algebra struktuuridesse
6. praktikum

Näidislahendused

Kõigi lahenduste autorid on toimetusele teada.

1. ülesanne

Toome näite kahest mitteväikesest kategooriast, millest üks on isomorfne iseenda duaalse kategooriaga ja teine ei ole.

Vaatleme kategooriat $\mathcal{C}$, kus $\mathcal{C}_0 = \mathsf{Set}_0$ ja kus ainsad morfismid on ühikmorfismid. On selge, et see on isomorfne enda duaalse kategooriaga.

Vaatleme nüüd kategooriat $\mathcal{D}$, kus $\mathcal{D}_0 = \mathsf{Set}_0$ ja ainsad morfismid peale ühikmorfismide on kaks morfismi $f\colon \{0\} \to \{1\}$ ja $g\colon \{0\} \to \{2\}$. Kui $\mathcal{D}$ oleks isomorfne oma duaalse kategooriaga, siis peaks isomorfism kujutama objekti $\{0\}$ mingiks objektiks, kust on kolm väljuvat morfismi. Sellist objekti aga ei leidu.

2. ülesanne

Toome näite kahest väikesest kategooriast, millest ühes isomorfismi ja bimorfismi mõisted langevad kokku ja teises ei lange.

Vaatleme üheobjektilist kategooriat, mille ainus objekt on A ja ainus morfism on 1_A. On selge, et 1_A on isomorfism: tal leidub pöördmorfism 1_A nii, et $1_A 1_A = 1_A$ ja $1_A 1_A = 1_A$. Et isomorfismid on bimorfismid, siis on ta ka bimorfism. Et ta on ainuke morfism, siis isomorfismi ja bimorfismi mõisted langevad kokku.

Vaatleme nüüd kaheobjektilist kategooriat, mille ainsad objektid on A ja B ning peale ühikmorfismide on ainuke morfism $f\colon A \to B$. Paneme tähele, et f on bimorfism. Tõepoolest, kui $fu = gu$, siis u saab olla ainult 1_A, seega

$$fu = gu \implies f = g.$$

Analoogiliselt

$$uf = ug \implies f = g.$$

Samas f ei ole isomorfism, sest ei leidu morfismi $B \to A$.

3. ülesanne

Tõestame, et parempoolsete R-moodulite kategoorias Mod_R üle ringi R on lõplikud korrutised ja lõplikud kokorrutised ühed ja samad.

Olgu $A_1, \ldots, A_n$ moodulid üle ringi R. Defineerime mooduli A, kus

$$A = A_1 \times \cdots \times A_n$$

ja tehted on defineeritud järgmiselt:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$
$$(a_1, \ldots, a_n)k = (a_1 k, \ldots, a_n k)$$

iga $k \in R$ korral. Vahetu kontroll näitab, et A on moodul.

Näitame, et A on moodulite $A_1, \ldots, A_n$ korrutis. Defineerime projektsioonid

$$p_i \colon A \to A_i, \qquad p_i(a_1, \ldots, a_i, \ldots a_n) = a_i.$$

Olgu Q mingi moodul ja iga i korral $q_i \colon Q \to A_i$ morfism. Näitame, et leidub üheselt määratud morfism $m \colon Q \to A$ nii, et iga i korral $p_i m = q_i$. Kui iga i ja mingi $x \in Q$ korral $p_i(m(x)) = q_i(x)$, siis vastavalt projektsioonide definitsioonile peab kehtima

$$m(x) = (q_1(x), \ldots, q_n(x)).$$

See defineeribki üheselt määratud morfismi m. Et q_i on homomorfismid, siis vahetu kontroll näitab, et ka m on homomorfism.

Näitame, et A on moodulite $A_1, \ldots, A_n$ kokorrutis. Defineerime sisestused

$$u_i \colon A_i \to A, \qquad u_i(a) = (0, \ldots, a, \ldots, 0),$$

kus a on kirjutatud i-ndale positsioonile. Olgu Q mingi moodul ja iga i korral $q_i \colon A_i \to Q$ morfism. Näitame, et leidub üheselt määratud morfism $m \colon A \to Q$ nii, et iga i korral $mu_i = q_i$. Defineerime m seosega

$$m(a_1, \ldots, a_n) = q_1(a_1) + \cdots + q_n(a_n).$$

Vahetu kontroll näitab, et m on homomorfism. Samuti, mistahes i korral

$$m(u_i(a_i)) = m(0, \ldots, a_i, \ldots, 0) = q_1(0) + \cdots + q_i(a_i) + \cdots + q_n(0) = q_i(a_i).$$

Viimaks näitame, et m on üheselt määratud. Iga selline m peab rahuldama tingimusi

$$m(0, \ldots, a_i, \ldots, 0) = q_i(a_i).$$

Lineaarsuse tõttu siis

$$m(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) = \sum_i m(0, \ldots, a_i, \ldots, 0) = \sum_i q_i(a_i).$$

Et korrutised ja kokorrutised on isomorfismi täpsusega üheselt määratud, siis $A_1, \ldots, A_n$ korrutised on parajasti objektiga A isomorfsed moodulid, ja $A_1, \ldots, A_n$ kokorrutised samuti. Seega lõplikud korrutised ja lõplikud kokorrutised langevadki kokku.

4. ülesanne

Vaatame ringide kategooriat. Ja morfismi $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2, f(x) = x \pmod 2$. Kuna tegemist on sürjektsiooniga, on f epimorfism: olgu u, v homomorfismid ja f sürjektiivne homomorfism, siis rakendades esiteks morfismi f saame tema kujutuseks terve sihthulga. Kui nüüd u ja v erineksid, siis $u(f(a))$ ja $v(f(a))$ peaksid ka erinema, näeme, et tõepoolest on f paremalt taandatav. Näitame, et ainus homomorfism $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}$ on nullhomomorfism. Mingu element 1 mingiks arvuks $f(1)$, mis ei ole null. Siis $1 + 1 = 0$ algses ringis, kuid $f(1) + f(1) \neq 0$ ringis $\mathbb{Z}$. Ilmselt on kompositsioon $0f$ võrdne nullhomomorfisimiga, mis ei ole võrdne ringi $\mathbb{Z}_2$ ühikmorfismiga.

5. ülesanne

Tõestame, et projektiivsete objektide kokorrutis on alati projektiivne. Olgu P_1 ja P_2 projektiivsed objektid ning (P, u_1, u_2) nende kokorrutis.

Olgu $g\colon B \to C$ epimorfism ja $f\colon P \to C$ morfism. Et $fu_1\colon P_1 \to C$ on morfism ja P_1 on projektiivne, siis leidub morfism $h_1\colon P_1 \to B$ nii, et $gh_1 = fu_1$. Analoogiliselt leidub morfism $h_2\colon P_2 \to B$ nii, et $gh_2 = fu_2$. Kokorrutis olemise tõttu leidum morfism $m\colon P \to B$ nii, et $h_1 = mu_1$ ja $h_2 = mu_2$. Seega $gmu_1 = fu_1$ ja $gmu_2 = fu_2$. Konspekti lause 10.40 duaalse väite tõttu siis $gm = f$.

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
 & B \arrow[u, two heads, "g"] & \\
P_1 \arrow[ur, "h_1"] \arrow[uur, bend left, "f"] \arrow[r, "u_1"] & P \arrow[u, "m"] & P_2 \arrow[ul, "h_2"'] \arrow[l, "u_2"']
\end{tikzcd}$$

Oleme konstrueerinud morfismi m nii, et $gm = f$.

6. ülesanne

Olgu A mittetriviaalne lõplik Abeli rühm. Näitame, et too ei ole injektiivne objekt. Teatavasti leiduvad arvud $n_1, \ldots, n_m > 1$ nii, et

$$A \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m};$$

olgu φ vastav isomorfism.

Olgu $k = |A|$. Defineerime rühma

$$C = \mathbb{Z}_{kn_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_m}$$

ja homomorfismi

$$g\colon A \to C, g(a) = (ka_1, \ldots, a_n),$$

kus

$$(a_1, \ldots, a_n) = \varphi(a).$$

On selge, et see on homomorfism. On ka selge, et see on injektsioon, seega monomorfism. Näitame, et ei leidu homomorfismi $h\colon C \to A$ nii, et $hg = 1_A$. Et $k = |A|$, siis iga $a \in A$ korral $ka = 0$. Oletame, et selline h siiski leidub ja vaatleme elementi $h(1, 0, \ldots, 0)$. Ühelt poolt

$$kh(1, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Teiselt poolt aga

$$kh(1, 0, \ldots, 0) = h(k, 0, \ldots, 0) = h(\varphi^{-1}(1, 0, \ldots, 0)) \neq 0.$$

Vastuolu.

Et ei leidu h, mis paneks kommuteeruma kolmnurka

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "g"] \arrow[d, "1_A"'] & C \arrow[dl, dashed, "h"] \\
A &
\end{tikzcd},$$

siis A ei ole injektiivne objekt.

Olgu samas nüüd $A = \{0\}$, $f\colon B \to A$ mingi morfism ja $g\colon B \to C$ monomorfism. Kindlasti siis $f(x) = 0$ iga $x \in B$ korral. Defineerime

$$h\colon C \to A, \qquad h(x) = 0,$$

ilmselt on see homomorfism ja sõltumata morfismist g kehtib $hg = f$.