Sissejuhatus algebra struktuuridesse
4. praktikumi ülesanded
Poolrühmad ja polügoonid.

Poolrühm S on vasakpoolse (parempoolse) *nullkorrutamisega*, kui $st = s$ ($st = t$) iga $s, t \in S$ korral.
Poolrühm S on *taandamisega*, kui $\forall s, u, v \in S\,[(su = sv \Rightarrow u = v) \wedge (us = vs \Rightarrow u = v)]$.
Poolrühma S nimetatakse *ristkülikpoolrühmaks*, kui $stu = su$ mistahes $s, t, u \in S$ korral.
Polügooni A üle monoidi M nimetatakse *lihtsaks*, kui tal ei ole teisi M-alampolügoone peale $\varnothing$ ja A.

1. Tõestada, et taandamisega poolrühm S sisaldab ülimalt ühte idempotenti, mis on sealjuures alati S ühikelement.

2. Poolrühm S on antud oma Cayley tabeliga

S	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	6	6
2	1	1	1	1	1	6	6
3	1	1	1	1	1	6	6
4	1	1	1	1	1	6	6
5	5	5	5	5	5	7	7
6	1	1	1	1	1	6	6
7	5	5	5	5	5	7	7

Kirjutada elementhaaval üles poolrühma S kõik $\mathcal{D}$-klassid ja nende jaotus $\mathcal{L}$- ja $\mathcal{R}$-klassideks (nn "munaresti" diagramm).

3. Tõestada, et taandamisega lihtne poolrühm, mis sisaldab vähemalt ühte idempotenti, on rühm.

4. Olgu $\mathcal{M} = \mathcal{M}[G, I, \Lambda, P]$ Reesi maatrikspoolrühm, kusjuures $|\mathcal{M}| = p \in \mathbb{P}$. Tõestada, et $\mathcal{M}$ on isomorfismi täpsuseni kas rühm, vasakpoolse nullkorrutamisega poolrühm või parempoolse korrutamisega nullpoolrühm.

5. Tõestada, et regulaarne kommutatiivne poolrühm on rühmade ühend.

6. Olgu A_M polügoon üle monoidi M ja $f : A_S \to S_S$ polügoonide homomorfism. Tõestada, et kui defineerida korrutamine hulgal A võrdusega $a * b = a \cdot f(b)$, siis $(A, *)$ on poolrühm. Tuua kaks näidet monoidist M ja polügoonist A nii, et ühel korral $(A, *)$ on monoid ja teisel korral ei ole.

7. Tõestada, et lihtne polügoon on alati taandumatu. Kas kehtib ka vastupidine väide, st iga taandumatu polügoon on lihtne?

8. Tuua näide kahest mitteisomorfsest projektiivsest polügoonist, mis ei ole vabad. Põhjendada vastust.

9*. Olgu $\mathcal{M} := \mathcal{M}[G^0, I, \Lambda, P]$ Reesi maatrikspoolrühma mõiste üldistus, kus rühmale G on lisatud nullelement $0 \notin G$, st $0g = g0 = 0$ iga $g \in G$ korral. Tõestada, et $\mathcal{M}$ on regulaarne poolrühm parajasti siis, kui maatriks $P = (p_{\lambda i})$ on regulaarne (võib-olla lõpmatu) maatriks.

10*. Olgu S selline regulaarne poolrühm, mille idempotentide hulk $E(S)$ moodustab ristkülikpoolrühma. Tõestada, et S on isomorfne mingi rühma ja mingi ristkülikpoolrühma otsekorrutisega.