Sügis 2021

Sissejuhatus algebra struktuuridesse
1. praktikumi ülesanded

1. Tõestada, et kõigi reaalarvuliste jadade vektorruumi (üle $\mathbb{R}$) mõõde ei ole lõplik ega isegi mitte loenduv.

2. Tõestada, et iga nullist erinev VR (sh lõpmatumõõtmeline) on isomorfne mingi funktsioonide VR-ga kujul $B^A = \{f : A \to B\}$.

Näpunäide. Hulgaks A võib võtta VR-i baasi.

3. Olgu $a, b \in \mathbb{R}$, $V = C([a, b], \mathbb{R})$ pidevate funktsioonide VR (punktiviisi tehetega) ja $W = \{f \in V \mid f(x) = \text{const}\}$. Leida V/W, st mingi tuntud VR, millega see on isomorfne.

4. Leida kõik homomorfismid rühmast $(\mathbb{Z}_8, +)$ rühma $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$.

5. Tõestada, et kui G on Abeli rühm, siis $\mathrm{End}(G)$ on ring. Tuua näide mittekommutatiivsest rühmast, mille korral sama konstruktsioon ei tööta, st tulemuseks ei ole ring.

6. Leida faktorrühmad $\mathbb{Z}^2/\{(a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ ja $\mathbb{Z}^3/\{(a, a, a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$.

7. Olgu V vektorruum, W selle alamruum, $a_1, \ldots, a_m$ ruumi W baas ja $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ ruumi V baas. Tõestada, et $b_1 + W, \ldots, b_n + W$ on faktorruumi V/W baas.

A on *algebra* üle korpuse K, kui $(A, +, \cdot)$ on VR üle K, $(A, *, +)$ on ring ja kehtib samasus $(kl) \cdot (a * b) = (k \cdot a) * (l \cdot b)$.

8. Tuua näide vähemalt kolmest mitteisomorfsest kommutatiivsest algebrast üle $\mathbb{R}$, mille kui VR mõõde on 2.

9*. Tõestada, et eelmises ülesandes toodud näited ongi isomorfismi täpsuseni kõik võimalikud kommutatiivsed kahemõõtmelised algebrad üle R.

10**. Tõestada või lükata ümber: iga vektorruumi V üle K (nii lõpliku- kui lõpmatumõõtmelise) mistahes endomorfism $f : V \to V$ on avaldatav kujul $\sum_{i=1}^{n_f} k_{f,i} f_{f,i}$, kus $k_{f,i} \in K$ ja $f_{f,i}$ on mingid V endomorfismid, mis rahuldavad tingimust $f_{f,i} \circ f_{f,i} = f_{f,i}$.