Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

1 Järjestikuste lähendite meetod Cauchy ülesande lahendamiseks

Sisukord

1.1 Mõned põhimõisted

Tuntud mõistete definitsioonid võib leida õpikust [1].

Definitsioon 1.1. *Me ütleme, et funktsioon f on pidev kohal a, kui*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definitsioon 1.2. *Olgu funktsioon f määratud piirkonnas D ja olgu x selle piirkonna sisepunkt. Piirväärtust*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

nimetatakse funktsiooni f tuletiseks kohal x ja tähistatakse $f'(x)$. Kui funktsioonil f on lõplik tuletis kohal x, siis öeldakse, et funktsioon f on diferentseeruv kohal x.

Definitsioon 1.3. *Suurust $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni diferentsiaaliks kohal x muudu Δx korral ja tähistatakse $df(x)$. Seega $y = f(x)$ korral $dy = f'(x)dx$ ehk*

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Teoreem 1.1. *Lagrange'i keskväärtusteoreem. Kui funktsioon f on pidev lõigul $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikul (a, b), siis leidub vähemalt üks punkt $\xi \in (a, b)$, mille korral*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \xi \in (a, b). \tag{1.2}$$

Olgu $P = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ funktsiooni $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Anname argumendile x_i muudu Δx_i, nii et

$$Q = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) \in D.$$

Definitsioon 1.4. *Kui leidub piirväärtus*

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{\Delta x_i}, \tag{1.3}$$

siis seda nimetatakse funktsiooni $z = f(x_1, \ldots, x_m)$ osatuletiseks muutuja x_i järgi punktis P.

Definitsioon 1.5. *Funktsiooni $z = f(P)$ nimetatakse pidevaks punktis A, kui*

$$\lim_{P \to A} f(P) = f(A).$$

Märkus 1.1. *Mitme muutuja elementaarfunktsioonid on funktsioonid, mis saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest, rakendades lõplikku arvu aritmeetilisi tehteid ja liitfunktsiooni moodustamist.*

Lause 1.1. *Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.*

1.2 Cauchy ülesande seade

Diferentsiaalvõrrandeid kasutatakse süsteemide modelleerimiseks, mudelite käitumise analüüsiks, ja näiteks tulemuste või käitumise ennustamiseks. Me alustame oma loengusarja kõige lihtsamast: algtingimusega ehk Cauchy ülesandest, mille kohta leiab teoreetilist materjali näiteks õpikust [3].

Piirkonna D all mõtleme me edaspidi **lahtist** sidusat piirkonda. Olgu võrrandi

$$y' = f(x, y)$$

parem pool $f(x, y)$ määratud muutujate x, y piirkonnas D ning olgu x_0 ja y_0 mingid etteantud arvud, mille korral punkt (x_0, y_0) kuulub piirkonda D.

Definitsioon 1.6. *Ülesannet, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi*

$$y' = f(x, y) \tag{1.4}$$

lahend $y = y(x)$, mis argumendi väärtusel $x = x_0$ omandab väärtuse $y = y_0$, s.t. rahuldab tingimust

$$y(x_0) = y_0 \tag{1.5}$$

nimetatakse algtingimusega ehk Cauchy ülesandeks võrrandi (1.4) *jaoks. Lisatingimust* (1.5) *nimetatakse algtingimuseks ehk Cauchy tingimuseks.*

Näide 1.1. Bioloogilise liigi arvukus (vt. [3]). Olgu $y(t)$ näiteks mingite bakterite arv ajamomendil t. Malthuse (inglise majandusteadlane 1766-1834) seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = k\,y,$$

või teisiti ka

$$y'(t) = k\,y(t),$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne.

Märgime, et antud võrrandiga $y'(t) = k\,y(t)$ on kirjeldatud liigi arvukuse muutumise kiirus igal ajamomendil t, otsitavaks on liigi arvukus $y(t)$ ise. Diferentsiaalvõrranditel on tavaliselt lõpmata arv lahendeid. Selleks, et ülesanne oleks korrektselt püstitatud ja saaks välja valida meie mudelile sobiva(d) lahendi(d), peab olema toodud lisaks veel mingi algtingimus, s.t. antud olukorras bakterite arv mingil algmomendil $t = t_0$. Tihti võib algmomendi võtta $t_0 = 0$. Näiteks algtingimuseks on siis $y(0) = 10^6$ bakterit mingis keskkonnas.

Märgime, et algtingimuse $y(0) = y_0$ korral on võrrandi täpseks lahendiks

$$y(t) = y_0\, e^{k\,t}.$$

Näeme, et $k > 0$ korral toimub liigi eksponentsiaalne kasv ja $k < 0$ korral liigi eksponentsiaalne kahanemine. $\diamond$

Näide 1.2. Näiteks on Cauchy ülesande

$$\begin{cases} y\,' = y \\ y(1) = 2 \end{cases}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

üldlahend vahetult välja kirjutatav kujul

$$y(x) = C\, e^{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Algtingimusest $y(1) = 2$ saame välja arvutada konstandi C:

$$2 = C\, e^{1} \quad \Rightarrow C = 2/e$$

ja Cauchy ülesande lahendiks on

$$y(x) = 2\, e^{x-1}.$$

$\diamond$

1.3 Cauchy ülesande lahendi olemasolu ja ühesus

Cauchy ülesande (1.4),(1.5) lahendi olemasolu kohta kehtib Peano teoreem.

Teoreem 1.2. *Peano teoreem, [3]. Olgu $f(x, y)$ pidev muutujate x, y piirkonnas D. Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks võrrandi $y\,' = f(x, y)$ integraalkõver ehk Cauchy ülesandel (1.4),(1.5) on vähemalt üks lahend.*

Cauchy ülesande (1.4),(1.5) lahendi ühesuse kohta kehtib Cauchy teoreem.

Teoreem 1.3. *Cauchy teoreem , [3]. Kui $f(x,y)$ ja selle osatuletis y järgi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ on määratud ja pidevad muutujate x, y piirkonnas D, siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks võrrandi $y' = f(x,y)$ integraalkõver ehk Cauchy ülesandel (1.4),(1.5) on parajasti üks lahend.*

Näide 1.3. Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$y' = 3y^{2/3}.$$

Lihtne on näha, et funktsioon $f(x,y) = y^{2/3}$ on pidev kogu xy-tasandil. Peano teoreemi järgi leidub algvõrrandil kogu xy-tasandil vähemalt üks lahend (neid võib olla rohkem kui üks). Tuletis y järgi

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$$

on määratud ja pidev, kui $y \neq 0$. Kui $y < 0$ või $y > 0$, siis Cauchy teoreemi järgi leidub vastavas piirkonnas algvõrrandil ainult üks lahend. Kui $y = 0$ (ehk y võrdub x-teljega), siis lahend ei pruugi olla ühene. Vahetult võib kontrollida, et iga suvalise väärtuse $x_0 \in (-\infty, \infty)$ korral läbib x-telje punkti $(x_0, 0)$ vähemalt kaks erinevat võrrandi lahendit: $y(x) = 0$ ja $y(x) = (x - x_0)^3$. $\diamond$

1.4 Cauchy ülesande ja Volterra integraalvõrrandi samaväärsus

Materjal pärineb suuresti konspektist [2] ja õpikust [3] (vt. Cauchy teoreemi tõestus, lk 50). Olgu $f(x,y)$ määratud ja pidev funktsioon mingis ristkülikus

$$R = \{(x,y) : |x - x_0| \leq h,\ |y - y_0| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon, h > 0\}.$$

Cauchy ülesanne

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.6}$$

on samaväärne Volterra integraalvõrrandiga

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{1.7}$$

Definitsioon 1.7. *Me ütleme, et funktsioon z on integraalvõrrandi* (1.7) *lahend lõigul* $[x_0 - h, x_0 + h]$, $h > 0$, *kui z on pidev sellel lõigul ning tema asetamisel võrrandisse* (1.7) *otsitava y kohale saame samasuse muutuja $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ suhtes, s.t. iga $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ korral punkt $(x, z(x)) \in D$ ning*

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))\, ds. \tag{1.8}$$

Näitame võrrandite (1.6) ja (1.7) samaväärsust. Oletame, et y on Cauchy ülesande (1.6) lahendiks lõigul $[x_0-h, x_0+h]$. Siis $y(x_0) = y_0$ ja iga argumendi $s \in [x_0-h, x_0+h]$ korral $y^{'}(s) = f(s, y(s))$. Integreerime selle võrrandi mõlemaid pooli

$$\int_{x_0}^{x} y^{'}(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds, \tag{1.9}$$

kus $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ on suvaliselt fikseeritud. Märgime, et integraalid leiduvad, kuna $f(x, y)$ ja seega y' on pidevad ja pidev funktsioon on Newton-Leibnizi mõttes integreeruv. Newton-Leibnizi integraal (vt. [1]) ülemise raja funktsioonina Φ on defineeritud seosega

$$\Phi(x) = \int_{a}^{x} z(t)\, dt = F(x) - F(a),$$

kus F on funktsiooni z algfunktsioon integreerimislõigul L ja $x, a \in L$. Järelikult valem (1.9) teiseneb kujule

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{1.10}$$

Asendades $y(x_0) = y_0$ saamegi, et y rahuldab iga $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ korral võrrandit (1.7). Lisaks on täidetud tingimus, et lahend y on pidev, kuna ta on algvõrrandi $y' = f(x, y)$ tõttu diferentseeruv lõigul $[x_0 - h, x_0 + h]$ ja diferentseeruv funktsioon on pidev sellel lõigul.

Oletame nüüd vastupidi: olgu y võrrandi (1.7) pidevaks lahendiks lõigul $[x_0 - h, x_0 + h]$, s.t.

$$y(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{1.11}$$

Integraalialune funktsioon $f(s, y(s))$ on eelduse järgi pidev iga $s \in [x_0-h, x_0+h]$ korral. Sel juhul on määratud integraal $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$ ülemise raja funktsioonina diferentseeruv kohal x, kusjuures kehtib

$$F^{'}(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds = f(x, y(x)), \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Saime, et F on pidevalt diferentseeruv lõigul $[x_0 - h, x_0 + h]$ ning järelikult on lõigul $[x_0 - h, x_0 + h]$ pidevalt diferentseeruv ka $y(x) = y_0 + F(x)$. Omakorda võrrandi (1.11) diferentseerimisel saame, et

$$y^{'}(x) = \frac{d}{dx}\left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\,ds\right) = F'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Seega y rahuldab võrrandit $y^{'}(x) = f(x, y)$ ja lisaks kehtib $y(x_0) = y_0$:

$$y(x_0) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x_0} f(s, y(s))\,ds = y_0.$$

Seega y on Cauchy ülesande (1.6) lahend lõigul $[x_0 - h, x_0 + h]$.

1.5 Cauchy ülesande lahendamine järjetikuste lähendite meetodi abil

Võttes alglähendiks konstantse funktsiooni $y = y_0$, konstrueerime funktsioonide jada

$$\boxed{\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0(s))\,ds, \\ y_2(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\,ds, \\ &\dots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\,ds, \\ &\dots \end{aligned}} \tag{1.12}$$

kus $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $n \in \mathbb{N}$. Saame funktsioonide jada $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$, $(n \in \mathbb{N})$, mis teatavatel tingimustel koondub Cauchy ülesande (1.6) lahendiks. Toodud lähendite jada $y_n(x)$ moodustamine kannab järjestikuste lähendite meetodi ehk iteratsioonimeetodi nime.

Iteratsioonimeetodit (1.12) saab rakendada Cauchy ülesande (1.6) praktiliseks lahendamiseks, kui lõpetada arvutused mingi küllalt suure $n \in \mathbb{N}$ korral. Sel juhul osutub $y_n(x)$ teatavaks lähendiks täpsele lahendile $y(x)$ lõigul $[x_0-h, x_0+h]$. Formuleerime järgnevalt kaks teoreemi iterasioonimeetodi koondumiseks ja veahinnanguks.

Teoreem 1.4. *Olgu võrrandi* (1.6) *parem pool* $f(x, y)$ *pidev kinnises ristkülikus*

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \le \delta,\ |y - y_0| \le \varepsilon\}$$

ning olgu tal ristkülikus R *olemas ka pidev osatuletis* $f_y(x, y)$ *muutuja* y *järgi. Siis diferentsiaalvõrrandil* (1.6) *on parajasti üks lahend* $y(x)$, *mis rahuldab tingimust* $y(x_0) = y_0$. *Lahend* $y(x)$ *on määratud ja pidevalt diferentseeruv lõigul* $[x_0 - h, x_0 + h]$, *kus*

$$h := \min\left\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}\right\}, \quad M = \max_{(x,y)\in R} |f(x, y)|.$$

Funktsioonide jada (1.12) *ehk* $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x), \ldots$ *koondub ühtlaselt lõigul* $[x_0 - h, x_0 + h]$ *ülesande* (1.6) *lahendiks* $y(x)$:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |y(x) - y_n(x)| = 0. \tag{1.13}$$

Teoreem 1.5. *Olgu täidetud teoreemi 1.4 eeldused ning olgu ülesande* (1.6) *täpse lahendi* y *lähend* y_n *arvutatud iteratsioonimeetodiga* (1.12). *Siis kehtib veahinnang*

$$\max_{x\in[x_0-h,x_0+h]} |y(x) - y_n(x)| \le \frac{M\,N^n}{(n + 1)!}\, h^{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.14}$$

kus

$$N := \max_{(x,y)\in R} |f_y(x, y)|.$$

Tõestus. Paneme tähele, et iteratsioonimeetodi (1.12) abil arvutatud lähendid $y_n(x)$, $(n = 1, 2, \ldots)$ on määratud ja pidevad lõigul $[x_0 - h, x_0 + h]$ ning nende graafikud paiknevad ristkülikus R. Teisiti öeldes, iga sellise x korral, mis rahuldab seost $|x - x_0| \le \delta$ kehtib $|y_0(x) - y_n(x)| \le \varepsilon$. Seose (1.13) tõttu on samad omadused ka jada y_n piirfunktsioonil y.

Defineerime

$$E_n(x) = y(x) - y_n(x), \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h], \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{1.15}$$

Kuna y on Cauchy ülesande (1.6) lahend lõigul $[x_0 - h, x_0 + h]$, siis Cauchy ülesande ja Volterra integraalvõrrandi samaväärsuse tõttu

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Saame, et iga $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ korral kehtib

$$\begin{aligned} |E_0(x)| = |y(x) - y_0(x)| &= \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds \right| \\ &\le \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)| \left| \int\limits_{x_0}^{x} ds \right| = M|x - x_0| \le M\, h. \end{aligned}$$

Antud tulemust kasutades leiame analoogiliselt, et

$$\begin{aligned} |E_1(x)| = |y(x) - y_1(x)| &= \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f(s, y(s)) - f(s, y_0(s))]\, ds \right| \\ &\le \max_{(x,y)\in R} |f_y(x,y)| \left| \int\limits_{x_0}^{x} [y(s) - y_0(s)]\, ds \right| = N \left| \int\limits_{x_0}^{x} |E_0(s)|\, ds \right| \\ &\le M\, N\, \frac{|x - x_0|^2}{2!} \le \frac{M\, N}{2!} h^2. \end{aligned}$$

Seega

$$\max_{x\in[x_0-h, x_0+h]} |y(x) - y_1(x)| \le \frac{M\, N^n}{2!}. \tag{1.16}$$

Induktsiooni abil võib veenduda, et hinnang (1.14) kehtib iga lähendi y_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ jaoks.

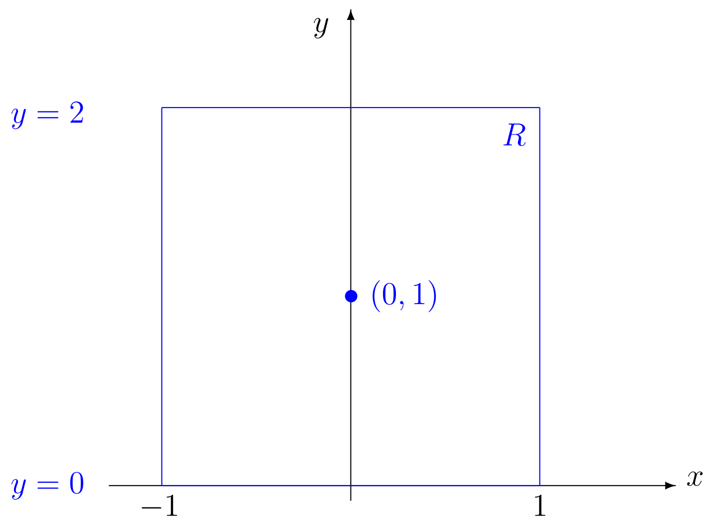
□

Näide 1.4. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$$

Võrrandi parem pool $f(x, y) = x - y$ ja osatuletis $f_y(x, y) = -1$ on pidevad funktsioonid kogu xy-tasandil, seega ka ruudul

$$R = \{(x, y) : |x| \le 1,\ |y - 1| \le 1\}.$$



Joonisel on ruut R keskpunktiga $(0,1)$: $|x| \leq 1, \quad |y-1| \leq 1$. Piirkonnas R saame leida, et kehtib hinnang $|f(x,y)| = |x-y| \leq 3$ ja $|f_y(x,y)| = |-1| \leq 1$ ning teoreemi 1.4 seostest saame, et

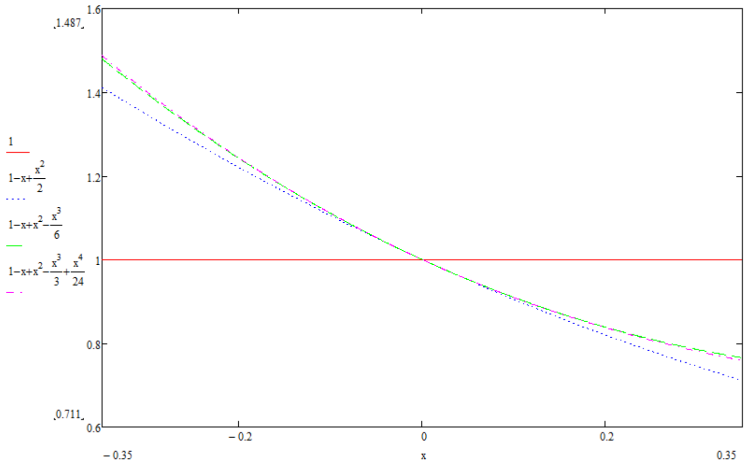
$$h = \min\left\{1, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}.$$

Järelikult on meie näiteülesandel parajasti üks lahend $y = y(x)$, mis on määratud ja pidev lõigul $[-1/3, 1/3]$ ja milleks koonduvad lähendid $y_0(x), y_1(x), \ldots$:

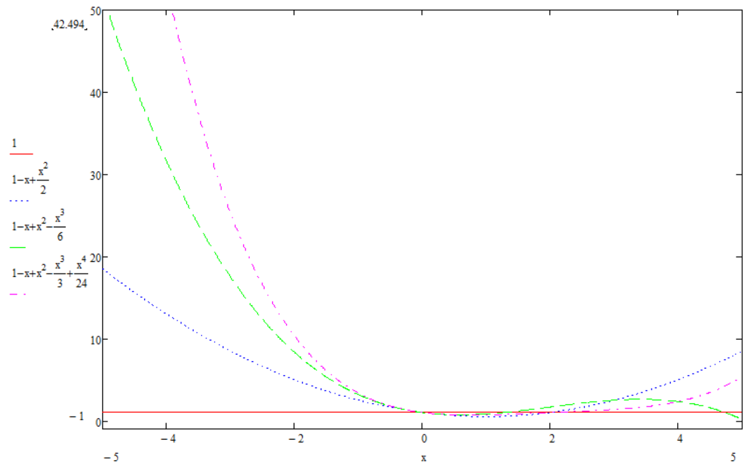
$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 1 \\
y_1(x) &= 1 + \int_0^x (s-1)\, ds = 1 - x + \tfrac{x^2}{2}, \\
y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left[s - \left(1 - s + \tfrac{s^2}{2}\right)\right] ds = 1 - x + x^2 - \tfrac{x^3}{6}, \\
y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left[s - \left(1 - s + s^2 - \tfrac{s^3}{6}\right)\right] ds = 1 - x + x^2 - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^4}{24}.
\end{aligned}$$

Teoreemist 1.5 saame veahinnanguteks

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[-1/3,1/3]} |y(x) - y_0(x)| &\leq 3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^1}{1!} = 1, \\
\max_{x\in[-1/3,1/3]} |y(x) - y_1(x)| &\leq 3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2!} = \tfrac{1}{6} \approx 0.1667, \\
\max_{x\in[-1/3,1/3]} |y(x) - y_2(x)| &\leq 3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3!} = \tfrac{1}{54} \approx 0.0185, \\
\max_{x\in[-1/3,1/3]} |y(x) - y_3(x)| &\leq 3\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^4}{4!} = \tfrac{1}{648} \approx 0.0015.
\end{aligned}$$



Jooniselt võime visuaalselt näha, et arvatavasti tegelik viga on natukene väiksem ja meie teoreetilised hinnangud on veidi jämedamad. Iteratsioonimeetodi töötab punkti x_0 küllalt väikeses ümbruses (vähemalt väikeste n väärtuste jaoks). Toome võrdluseks sama graafiku, aga laiemas ümbruses, lõigul $[-5, 5]$:



$\diamond$

Märkus 1.2. *Iteratsioonimeetodi abil on sobiv arvutada lahendi y väärtusi punktides, mis paiknevad küllalt lähedal algpunktile x_0. Kui meid huvitavad lahendi väärtused $x_0 -$ st suhteliselt kaugel paiknevates puktides, siis enamasti on mõistlikum kasutada lahendi jätkamist. See tähendab, me leiame iteratsioonimeetodi abil leitud viimase lähendi y_n abil $y_n(x_1)$, kus viga $|y(x_1) - y_n(x_1)|$ võiks olla veel küllalt väike ja seejärel kasutame iteratsioonimeetodit uuesti juba punktis x_1. Sel juhul kasutame algtingimust $y(x_1) \approx y_1 = y_n(x_1)$ ja meie Cauchy ülesanne näeks välja järgmine*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_1) = y_1, \qquad \text{kus } y_1 = y_n(x_1), \quad x_1 \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Nüüd me saame leida mingi uue h_1 ja lahendada uue Cauchy ülesande lõigul $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$ jne.

Märkus 1.3. *Pigem tuleks võtta rohkem sõlmi $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ ja kasutada iteratsioonides väiksemat järku n, praktikas on tihti mõistlik võtta $n \leq 10$.*

Märkus 1.4. *Iteratsioonimeetod lubab liikuda ka vastassuunas, s.t. x_1 võib näiteks olla $x_0 - h$.*

Viited

[1] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[2] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.

[3] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu Ülikooli Kirjastus 2011.