Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

10 Kõdunud tuuma meetod

Sisukord

Mõnikord saab Fredhomi võrrandit lahendada kõdunud tuuma meetodil, mida võib õnnestuda kasutada ka mittelineaarse Hammersteini integraalvõrrandi korral. Meetodi plussiks on tema väga lihtne skeem ja lisaks võimalus leida lahendit analüütilisel kujul, kuid miinuseks see, et tuleb teha palju integreerimisi (ja see viimane võib olla üsna ajamahuks protsess). Meetodi kasutamine eeldab tuumalt $K(t,s)$ teatavat tüüpi spetsiaalset kuju.

10.1 Kõdunud tuumaga Fredholmi integraalvõrrand

Vaatleme lineaarset teist liiki Fredholmi integraalvõrrandit

$$y(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{10.1}$$

kus vabaliige $f(t)$ on pidev lõigul $[a,b]$ ning mille tuum $K(t,s)$ on kõdunud (ingl. k. *Degenerate Kernel*), s.t. avaldub summana ühemuutuja funktsioonidest

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\beta_i(s), \quad s,t \in [a,b]. \tag{10.2}$$

Siinjuures eeldame, et funktsioonid $\alpha_i(t), \beta_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, on pidevad lõigul $[a,b]$ ning funktsioonid $\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)$ on lineaarselt sõltumtud, s.t. võrdus

$$c_1\alpha_1(t) + \cdots + c_n\alpha_n(t) = 0$$

kehtib iga argumendi $t \in [a, b]$ jaoks ainult siis, kui kõik konstandid $c_1, \dots, c_n$ on võrdsed nulliga ehk $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Näide 10.1. Funktsioonid $\alpha_1(t) = 1, \alpha_2(t) = t, \alpha_3(t) = t^2, \dots, \alpha_n(t) = t^{n-1}$ on lineaarselt sõltumatud, kuna ühtegi neist funktsioonidest ei ole võimalik avaldada teiste kaudu.

Samas ei ole lineaarselt sõltumatud funktsioonid $\alpha_1(t) = 1, \alpha_2(t) = t, \alpha_3(t) = 2t - 3$, kuna võrdus

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot t + c_3 \cdot (2t - 3) = 0$$

kehtib ka siis, kui võtta $c_1 = 3$, $c_2 = -2$ ja $c_3 = 1$. $\diamond$

Näide 10.2. Funktsioonid $\alpha_1(t) = \sin(t), \alpha_2(t) = \cos(t)$ on lineaarselt sõltumatud, kuna võrdusest

$$c_1 \sin t + c_2 \cos t = 0$$

järeldub pärast võrrandi ruutu võtmist, et

$$c_1^2 \sin^2 t - c_2^2 (1 - \sin^2 t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (c_1^2 + c_2^2) \sin^2 t - c_2^2 = 0.$$

Kuna siinusfunktsiooni ei saa avaldada ainult konstantse funktsiooni kaudu ja $c_1^2 + c_2^2$ võrdub nulliga ainult siis, kui mõlemad konstandid c_1, c_2 võrduvad nulliga, siis järelikult algne võrdus saab kehtida ainult siis, kui $c_1 = c_2 = 0$. $\diamond$

Näide 10.3. On selge, et tuum $K(t, s) = ts$ on kõdunud, kuna võime võtta $\alpha_1(t) = t$ ja $\beta_1(s) = s$. Kõdunud on ka tuum $K(t, s) = \cos t - e^{s+t} \sin t + 1$, kuna

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(t) \beta_i(s),$$

kus $\alpha_1(t) = 1$, $\alpha_2(t) = e^t \sin t$, $\alpha_3(t) = \cos t$ ja $\beta_1(s) = 1$, $\beta_2(s) = -e^s$, $\beta_3(s) = 1$. Kõik need funktsioonid on pidevad suvalisel lõigul $[a, b]$ ning funktsioonid $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)$ on lineaarselt sõltumatud. $\diamond$

Näide 10.4. Tuum $K(t, s) = s \cdot \sin(t + s)$ on kõdunud, kuna trigonomeetriliste valemite abil saab teisendada

$$K(t, s) = s \cdot \sin(t + s) = s \cdot (\sin t \cdot \cos s + \cos t \cdot \sin s).$$

Seega võime võtta kus $\alpha_1(t) = \sin t$, $\alpha_2(t) = \cos t$ ja $\beta_1(s) = s \cdot \cos s$, $\beta_2(s) = s \cdot \sin s$. $\diamond$

10.2 Kõdunud tuumaga Fredholmi integraalvõrrandi lahendamine

Kõdunud tuumaga integraalvõrrandi (10.1) saab lahendada järgmisel viisil. Asetades tuuma (10.2) võrrandisse (10.1), saame

$$y(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t) \int_a^b \beta_i(s) y(s)\, ds + f(t), \quad t \in [a, b]. \tag{10.3}$$

Kuna määratud integraalid $\int_a^b \beta_i(s) y(s)\, ds$ on tegelikult mingid (hetkel tundmatud) arvud, siis tähistame nad konstantideks c_i:

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s)\, ds, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.4}$$

Kui võrrandil (10.1) on üldse lahend olemas, siis ta peab avalduma kujul

$$y(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, \alpha_i(t) + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{10.5}$$

kus $c_1, \ldots, c_n$ on arvulised kordajad, mille määramisel ongi võrrandi (10.1) lahend y leitud. Kordajate $c_1, \ldots, c_n$ määramiseks asetame avaldise (10.5) võrrandisse (10.3),

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\, \alpha_i(t) + f(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_a^b \beta_i(s) \left[\lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, \alpha_j(s) + f(s) \right] ds + f(t), \quad t \in [a, b], \tag{10.6}$$

ehk

$$\sum_{i=1}^{n} \left(c_i - \int_a^b \beta_i(s) \left[\lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, \alpha_j(s) + f(s) \right] ds \right) \alpha_i(t) = 0, \quad t \in [a, b]. \tag{10.7}$$

Funktsioonide $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ lineaarsest sõltumatusest lõigul $[a, b]$ järeldub nende ees olevate konstantide võrdumine nulliga. Teiste sõnadega, seos (10.7) kehtib parajasti siis, kui

$$c_i - \int_a^b \beta_i(s) \left[\lambda \sum_{j=1}^{n} c_j\, \alpha_j(s) + f(s) \right] ds = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10.8}$$

Viimase võrrandisüsteemi annab kirjutada lihtsamal kujul

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{ij} c_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10.9}$$

kus arvulised kordajad A_{ij}, b_i avalduvad määratud integraalidena

$$A_{ij} = \int_a^b \beta_i(s)\alpha_j(s)\,ds, \quad b_i = \int_a^b \beta_i(s)f(s)\,ds \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{10.10}$$

Lineaarvõrrandite süsteemi (10.9) tundmatute $c_1,\ldots,c_n$ suhtes võib maatrikskujul kirja panna järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \cdots & -\lambda A_{1,n-1} & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \cdots & -\lambda A_{2,n-1} & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\lambda A_{n-1,1} & -\lambda A_{n-1,2} & \cdots & 1-\lambda A_{n-1,n-1} & -\lambda A_{n-1,n} \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n,2} & \cdots & -\lambda A_{n,n-1} & 1-\lambda A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{pmatrix}.$$

See süsteem on üheselt lahenduv, kui tema determinant

$$D(\lambda) := \begin{vmatrix} 1-\lambda A_{11} & -\lambda A_{12} & \cdots & -\lambda A_{1,n-1} & -\lambda A_{1n} \\ -\lambda A_{21} & 1-\lambda A_{22} & \cdots & -\lambda A_{2,n-1} & -\lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\lambda A_{n-1,1} & -\lambda A_{n-1,2} & \cdots & 1-\lambda A_{n-1,n-1} & -\lambda A_{n-1,n} \\ -\lambda A_{n1} & -\lambda A_{n,2} & \cdots & -\lambda A_{n,n-1} & 1-\lambda A_{nn} \end{vmatrix}$$

on nullist erinev. Niisiis, kui $D(\lambda) \neq 0$, saame süsteemist (10.9) leida suurused $c_1,\ldots,c_n$ ning seejärel välja kirjutada võrrandi (10.1) lahendi kujul (10.5). Võtame tulemuse kokku järgmise teoreemina.

Teoreem 10.1. *Avaldugu võrrandi* (10.1) *tuum* $K(t,s)$ *kujul* (10.2),

$$K(t,s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\beta_i(s), \quad s,t \in [a,b], \tag{10.11}$$

kus α_i, β_i, $i = 1,\ldots,n$, *on pidevad funktsioonid lõigul* $[a,b]$ *ning* $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ *on lineaarselt sõltumatud lõigul* $[a,b]$. *Olgu võrrandi* (10.1) *vabaliige* f *pidev funktsioon lõigul* $[a,b]$ *ning olgu* $D(\lambda) \neq 0$. *Siis võrrand* (10.1) *on üheselt lahenduv ning tema lahend avaldub kujul* (10.5),

$$y(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha_i(t) + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{10.12}$$

kus kordajad $c_1,\ldots,c_n$ *on leitavad lineaarsest algebralisest võrrandisüsteemist* (10.9).

Märkus 10.1. *Süsteemi* (10.9) *võime koostada ka sel teel, et asetame otsitava lahendi avaldise* (10.5) *võrdustesse* (10.4).

Näide 10.5. Lahendada lineaarne Fredholmi teist liiki integraalvõrrand

$$y(t) = \int_0^1 ts\, y(s)\, ds + e^t - t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Kuna tuum $K(t, s) = ts$ on kõdunud, siis järeldub teoreemist 10.1, et

$$y(t) = c\, t + e^t - t = (c - 1)t + e^t, \quad t \in [0, 1],$$

kus

$$c = \int_0^1 s\, y(s)\, ds.$$

Konstandi c leidmiseks asetame $y(t)$ avaldise konstandi c avaldisse:

$$c = \int_0^1 [(c-1)s^2 + se^s]\, ds = (c-1)\frac{s^3}{3}\Big|_{s=0}^{s=1} + (s-1)e^s\Big|_{s=0}^{s=1} = \frac{c-1}{3} + 1,$$

millest näeme, et $c = 1$. Asetades suuruse $c = 1$ lahendi $y(t)$ avaldisse, saame vastuseks $y(t) = e^t$. $\diamond$

Näide 10.6. Lahendada mittelineaarne homogeenne Hammersteini integraalvõrrand

$$y(t) = \int_0^1 (t+1)s^2\, y^2(s)\, ds, \quad 0 \le t \le 1.$$

Kuna tuum $K(t, s) = (t + 1)s^2$ on kõdunud, siis avaldub lahend $y(t)$ kujul

$$y(t) = c\,(t + 1), \quad t \in [0, 1],$$

kus

$$c = \int_0^1 s^2\, y^2(s)\, ds.$$

Konstandi c leidmiseks asetame $y(t)$ avaldise konstandi c avaldisse:

$$c = \int_0^1 s^2[c(s+1)]^2\, ds = c^2 \int_0^1 [s^4 + 2s^3 + s^2]\, ds = \frac{31}{30}c^2,$$

millest edasi teisendades saame

$$c\left(1 - \frac{31}{30}c\right) = 0.$$

Saime, et $c_1 = 0$ ja $c_2 = \frac{30}{31}$ ehk võrrandil on vähemalt kaks lahendit $y_1(t) = 0$ ja $y_2(t) = \frac{30}{31}(t + 1)$. $\diamond$

10.3 Tuuma asendamine kõdunud tuumaga

Kui integraalvõrrandi (10.1) tuum $K(t,s)$ ei ole kõdunud, siis võime püüda asendada tuuma $K(t,s)$ temaga lähedase kõdunud tuumaga

$$K_n(t,s) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(t)\beta_i(s), \quad s,t \in [a,b], \tag{10.13}$$

ja lahendada võrrandi (10.1) asemel võrrandi

$$y_n(t) = \lambda \int_a^b K_n(t,s)y_n(s)\,ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{10.14}$$

kus $y_n(t)$ on otsitav funktsioon. Esialgset tuuma $K(t,s)$ võib üritada viia kõdunud tuuma kujule astmeritta arendamise teel (näiteks Taylori või Fourier' rea osasummana). Kerkib küsimus, millistel tingimustel võrrandite (10.14) lahendid $y_n(t)$ lähenevad n kasvades võrrandi (10.1) lahendile $y(t)$ ja kui kiiresti. Neid küsimusi on analüüsitud töös [2].

Näide 10.7. [1, 2] Olgu vaja lahendada integraalvõrrand

$$y(t) = \int_0^{1/2} \sin(ts)y(s)\,ds + t^3, \quad t \in [0,1/2].$$

Esiteks võime märgata, et

$$\max_{t\in[0,1/2]} \int_0^{1/2} |\sin(ts)|\,ds \le \frac{1}{2}\sin\frac{1}{4} < \frac{1}{8} < 1,$$

siis on võrrand teoreemi 10.3 põhjal üheselt lahenduv. Taylori valemi põhjal saame võrrandi tuuma $K(t,s) = \sin(ts)$ arendada näiteks muutuja s järgi astmeritta (punktis $s = 0$),

$$\sin(ts) = \sin(0\cdot t) + \left.\frac{\partial \sin(ts)}{\partial s}\right|_{s=0} s + \left.\frac{\partial^2 \sin(ts)}{\partial s^2}\right|_{s=0} \frac{s^2}{2!} + \left.\frac{\partial^3 \sin(ts)}{\partial s^3}\right|_{s=0} \frac{s^3}{3!} + \dots,$$

ehk

$$\sin(ts) = ts - \frac{(ts)^3}{3!} + \frac{(ts)^5}{5!} - \dots.$$

Seega võrrandi lähislahendi $y_1(t)$ leidmiseks võiksime tuuma $K(t,s) = \sin(ts)$ asendada tuumaga $K_1(t,s) = ts$. Sel juhul teoreemi 10.1 järgi avaldub võrrandi lahend $y_1(t)$ kujul

$$y_1(t) = c\,t + t^3, \quad t \in [0,1/2].$$

Asendame viimase avaldise võrrandisse,

$$c\,t + t^3 = t\int_0^{1/2} s(c\,s+s^3)\,ds + t^3 \quad \Rightarrow \quad \left(c - \int_0^{1/2} s(c\,s+s^3)\,ds\right)\,t = 0,$$

millest

$$c = \int_0^{1/2} (c\,s^2+s^4)\,ds = \frac{c}{24} + \frac{1}{160} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{3}{460} \approx 6.52174\times 10^{-3}.$$

Siit saame lähislahendi välja kirjutada,

$$y_1(t) = \frac{3}{460}t + t^3, \quad t\in[0,1/2].$$

Täpsema lähislahendi $y_3(t)$ leidmiseks võime lahendada kõdunud tuumaga võrrandi

$$y_3(t) = \int_0^{1/2}\left(ts - \frac{t^3s^3}{6} + \frac{t^5s^5}{120}\right) y_3(s)\,ds + t^3, \quad t\in[0,1/2].$$

Meie tuum on kõdunud kujul, kus

$$\alpha_1(t)=t, \quad \alpha_2(t)=t^3, \quad \alpha_3(t)=t^5, \quad \beta_1(s)=s, \quad \beta_2(s)=-\frac{s^3}{6}, \quad \beta_3(s)=\frac{s^5}{120}.$$

Teoreemi 10.1 järgi avaldub võrrandi lahend $y_3(t)$ kujul

$$y_3(t) = c_1t + c_2t^3 + c_3t^5 + t^3, \quad t\in[0,1/2].$$

Kordajate c_1, c_2, c_3 leidmiseks lahendame süsteemi (10.9),

$$\begin{pmatrix} 1-A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{21} & 1-A_{22} & -A_{23} \\ -A_{31} & -A_{32} & 1-A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3\end{pmatrix},$$

kus konstandid A_{ij} ja b_i on valemite (10.10) abil üsna lihtsalt leitavad,

$$b_1 = \int_0^{1/2} s\,s^3\,ds = \frac{1}{160}, \quad b_2 = -\int_0^{1/2}\frac{s^3}{6}\,s^3\,ds = -\frac{1}{5376}, \quad b_3 = \int_0^{1/2}\frac{s^5}{120}\,s^3\,ds = \frac{1}{552960},$$

$$A_{11} = \int_0^{1/2} s\,s\,ds = \frac{1}{24}, \quad A_{12} = \int_0^{1/2} s\,s^3\,ds = \frac{1}{160}, \quad A_{13} = \int_0^{1/2} s\,s^5\,ds = \frac{1}{896},$$

$$A_{21} = -\int_0^{1/2}\frac{s^3}{6}\,s\,ds = -\frac{1}{960}, \quad A_{22} = -\int_0^{1/2}\frac{s^3}{6}\,s^3\,ds = -\frac{1}{5376}, \quad A_{23} = -\int_0^{1/2}\frac{s^3}{6}\,s^5\,ds = -\frac{1}{27648},$$

$$A_{31} = \int\limits_0^{1/2} \frac{s^5}{120}\, s\, ds = \frac{1}{107520}, \quad A_{32} = \int\limits_0^{1/2} \frac{s^5}{120}\, s^3\, ds = \frac{1}{552960}, \quad A_{33} = \int\limits_0^{1/2} \frac{s^5}{120}\, s^5\, ds = \frac{1}{2703360}.$$

Võrrandisüsteemi lahendit on võimalik lihtsalt leida arvuti abil, saame et $c_1 \approx 6.52048 \times 10^{-3}$, $c_2 \approx -1.92768 \times 10^{-4}$ ja $c_3 \approx 1.86875 \times 10^{-6}$. $\diamond$

Viited

[1] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.

[2] E. Tamme. Integraalvõrrandite lahendusmeetodid. Tartu, 1989.