

11 Kvadratuurvalemite meetod Fredholmi integraalvõrrandi jaoks

Sisukord

11 Kvadratuurvalemite meetod Fredholmi integraalvõrrandi jaoks	106
11.1 Meetodi kirjeldus	106
11.2 Lähislahendite veahinnang	109
11.3 Kvadratuurvalemi valik	110
11.4 Lahtised valemid ehk valemide otspunktide jaoks	115
11.5 Kvadratuurprotsessi koondumine	116

11.1 Meetodi kirjeldus

Vaatleme lineaarset II liiki Fredholmi integraalvõrrandit

$$y(t) = \lambda \int_a^b K(t, s)y(s) ds + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (11.1)$$

kus $-\infty < a < b < \infty$, λ on arvuline kordaja, $K(t, s)$ tuum, $f(t)$ vabaliige ja $y(t)$ otsitav funktsioon. Eeldame, et tuum K on pidev funktsioon ruudul

$$D = \{(t, s) : a \leq t \leq b, a \leq s \leq b\} \quad (11.2)$$

ja f on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$. Lisaks eeldame, et võrrandile (11.1) vastaval homogeensel võrrandil

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)y(s) ds = 0, \quad t \in [a, b], \quad (11.3)$$

on olemas vaid triviaalne lahend $y = 0$. Võrrand (11.1) on siis Fredholmi teoreemi 11.1 põhjal üheselt lahenduv ja tema lahend y on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$.

Teoreem 11.1. [4] Olgu tuum $K(t, s)$ pidev ruudul D ja vabaliige $f(t)$ pidev lõigul $[a, b]$. Kui võrrandile (11.1) vastaval homogeenisel võrrandil (11.3) leidub vaid triviaalne lahend $y(t) = 0$, siis integraalvõrrand (11.1) on üheselt lahenduv ja tema lahend $y(t)$ on pidev lõigul $[a, b]$.

Üks loomulikumaid meetodeid integraalvõrrandi (11.1) ligikaudseks lahendamiseks on järgmine. Valime mingi kvadratuurvalemi kujul

$$\int_a^b G(s) ds = \sum_{j=1}^N w_j G(s_j) + E_N(G), \quad a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_N \leq b, \quad (11.4)$$

kus G on funktsioon, mille integraali me tahame leida, s_1, \dots, s_N on kvadratuurvalemi sõlmed, w_1, \dots, w_N kvadratuurvalemi kordajad ja $E_N(G)$ jääkliige. Seejuures eeldame, et G on pidev lõigul $[a, b]$ ning nii sõlmed s_1, \dots, s_N kui kordajad w_1, \dots, w_N võivad sõltuda ka naturaalarvust N . Näiteks vasakpoolse ristkülikvalemi puhul

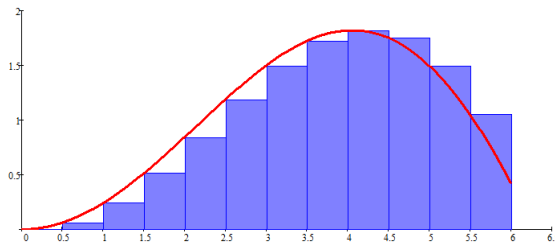
$$s_j = a + (j-1)h, \quad j = 1, \dots, N, \quad h = \frac{b-a}{N-1}, \quad N \geq 2, \quad (11.5)$$

$$w_1 = \dots = w_{N-1} = h, \quad w_N = 0,$$

ja vastav kvadratuursumma

$$\sum_{j=1}^N w_j G(s_j) = hG(s_1) + hG(s_2) + \dots + hG(s_{N-1})$$

kujutab endast selliste ristkülikute pindalade summat S , kus vastava ristküliku ühe külje pikkuseks on h , teise külje pikkuseks aga $G(s_1), \dots, G(s_{N-1})$.



Definitsioon 11.1. Kui

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N(G) = 0 \quad \text{ehk} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N w_j G(s_j) = \int_a^b G(s) ds, \quad (11.6)$$

siis öeldakse, et kvadratuurprotsess (kvadratuurvalem) koondub antud funktsiooni G korral.

Näiteks valemi (11.4)-(11.5) korral seos (11.6) kehtib igal lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni G korral.

Järgnevas eeldame, et sõlmed s_1, \dots, s_N ja kordajad w_1, \dots, w_N on valitud nii, et kvadratuurprotsess (11.4) koondub iga lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni G puhul.

Võrrandi (11.1) ligikaudseks lahendamiseks asendame selles oleva integraali sumмага kvadratuurvalemi (11.4) abil, milles jätame ära jääkliikme E_N :

$$\int_a^b K(t, s)y(s) ds \approx \sum_{j=1}^N w_j K(t, s_j)y(s_j), \quad t \in [a, b]. \quad (11.7)$$

Sedasi saame suuruse y lähendi y_N leidmiseks järgmise võrrandi (miks on muutuja y asemel vaja tuua sisse uus muutuja y_N):

$$y_N(t) - \lambda \sum_{j=1}^N w_j K(t, s_j)y_N(s_j) = f(t), \quad t \in [a, b]. \quad (11.8)$$

Võrrandi (11.8) lahendamiseks kirjutame selle välja igas sõlmes $t = s_1, \dots, t = s_N$. Nii jõuame $N \times N$ -mõõtmelise lineaarvõrrandite süsteemini

$$z_i - \lambda \sum_{j=1}^N w_j K_{ij} z_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11.9)$$

kus

$$K_{ij} = K(s_i, s_j), \quad f_i = f(s_i), \quad i, j = 1, \dots, N,$$

ning

$$z_i = y_N(s_i), \quad i = 1, \dots, N,$$

on otsitavad. Kirjutame süsteemi (11.9) välja ka maatrikskujujul,

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda w_1 K_{11} & -\lambda w_2 K_{12} & \cdots & -\lambda w_N K_{1N} \\ -\lambda w_1 K_{21} & 1 - \lambda w_2 K_{22} & \cdots & -\lambda w_N K_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda w_1 K_{N-1,1} & -\lambda w_2 K_{N-1,2} & \cdots & -\lambda w_N K_{N-1,N} \\ -\lambda w_1 K_{N1} & -\lambda w_2 K_{N2} & \cdots & 1 - \lambda w_N K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Lahendades süsteemi (11.9) (millal on see võimalik?), leiame suurused z_1, \dots, z_N . Allpool toodud teoreemist 11.2 järeldub, et z_1, \dots, z_N on integraalvõrrandi (11.1) lähendi $y(t)$ lähisväärtusteks $t = s_i$ korral:

$$z_i = y_N(s_i) \approx y(s_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (11.10)$$

Võrrandi (11.1) lahendi $y(t)$ lähisväärtusi teistel kohtadel $t \in [a, b]$ saab leida seose (11.8) abil, asendades selles suurused $\{y_N(s_j)\}$ süsteemi (11.9) lahendamisel saadud väärtustega z_1, \dots, z_N :

$$y_N(t) = \lambda \sum_{j=1}^N w_j K(t, s_j) z_j + f(t), \quad t \in [a, b]. \quad (11.11)$$

Definitsioon 11.2. Üleminekut võrrandilt (11.1) seostele (11.9) ja (11.11) nimetatakse kvadratuurvalemite meetodiks võrrandi (11.1) jaoks.

Selle kohaselt tuleb kõigepealt valida sobiv kvadratuurvalem kujul (11.4) (järgmises peatükis on esitatud rida praktikas sageli kasutatavaid kvadratuurvalemiteid koos jääkliikme avaldisega $E_N(G)$), seejärel koostada ja lahendada lineaarne võrrandisüsteem (11.9) ning esitada lähislahend kujul (11.11).

Definitsioon 11.3. Seose (11.11) abil leitud funktsiooni y_N nimetatakse sageli ka võrrandi (11.1) lahendi Nyströmi lähendiks ning üleminekut võrrandilt (11.1) seostele (11.9) ja (11.11) Nyströmi meetodiks.

11.2 Lähislahendite veahinnang

Meetodi (11.9), (11.11) abil saadud võrrandi (11.1) lähislahendite viga iseloomustab järgmine tulemus (vt. [4]).

Teoreem 11.2. *Olgu võrrandi (11.1) tuum K pidev ruudul D ja vabaliige f pidev lõigul $[a, b]$ ning olgu võrrandile (11.1) vastaval homogeenisel võrrandil (11.3) olemas vaid triviaalne lahend $y = 0$. Eeldame veel, et kvadratuurprotsess (11.4) koondub iga lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni G puhul.*

Siis võrrandil (11.1) on olemas parajasti üks lahend $y^(t)$, mis on pidev iga $t \in [a, b]$ puhul. Leidub selline naturaalarv N_0 , et iga $N > N_0$ korral on võrrandisüsteemil (11.9) olemas parajasti üks lahend (z_1^*, \dots, z_N^*) ning kehtib hinnang*

$$\max_{i=1, \dots, N} |y^*(s_i) - z_i^*| \leq \max_{t \in [a, b]} |y^*(t) - y_N^*(t)| \leq c \max_{t \in [a, b]} |E_N(K(t, \cdot) y^*(\cdot))|, \quad (11.12)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N , $y_N^(t)$ on lahendi $y^*(t)$ lähislahend kujul (11.11), milles $z_j = z_j^*$ ($j = 1, \dots, N$) ning $E_N(K(t, \cdot) y^*(\cdot))$ on kvadratuurvalemil (11.4) jääkliikme integreeritava suuruse $K(t, s) y^*(s)$ jaoks fikseeritud t korral.*

Punkt jääkliikme avaldises funktsioonide $K(t, s)$ ja $y^*(s)$ argumenti s kohal tähendab, et jääkliige ei sõltu muutujast s .

11.3 Kvadratuurvalemi valik

Võrrandisüsteemi (11.9) koostamiseks võime kvadratuurvalemiga (11.4) kasutada näiteks ristkülikvalemite, trapetsvalemite, Simpsoni valemite või Gaussi valemite, mis kõik koonduvad iga lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni G korral. Esitame järgnevas nimetatud valemite sõlmed ja kordajad ning toome tõestuseta ära ka vastavad jääkliikmete avaldised (nende tõestuse võib leida näiteks õpikust [3]).

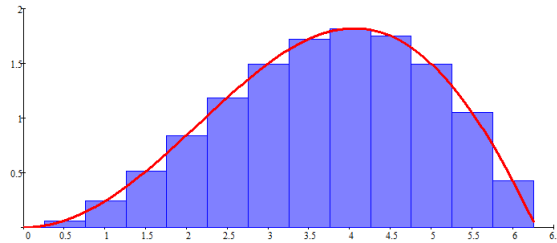
Keskmine ristkülikvalem

Valem (11.4),

$$\int_a^b G(s) ds = \sum_{j=1}^N w_j G(s_j) + E_N(G), \quad (11.13)$$

on keskmine ristkülikvalem, kui tema sõlmed ja kordajad avalduvad järgmiselt:

$$s_j = a + \left(j - \frac{1}{2}\right) h, \quad w_j = h, \quad h = \frac{b-a}{N}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (11.14)$$



Tuletame valemid (11.14). Olgu meil eisisaldsed sõlmed $a = x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ ühtlase jaotusega. Sel juhul $h = (b - a)/N$ ja saame $N - 1$ osalõigu keskpunkti

$$s_j = x_j + \frac{h}{2} = a + (j - 1)h + \frac{h}{2} = a + \left(j - \frac{1}{2}\right) h \quad j = 1, \dots, N - 1.$$

Järgnevalt asendame integraali $\int_{x_j}^{x_{j+1}} G(s) ds$ ristküliku pindalaga, mis võrdub aluse h ja kõrguse $G(s_j)$ korrutisega,

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} G(s) ds \approx hG(s_j), \quad j = 1, \dots, N - 1.$$

Siit saame avaldada terve integraali üle lõigu $[a, b]$,

$$\int_a^b G(s) ds = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{x_j}^{x_{j+1}} G(s) ds \approx hG(s_1) + hG(s_2) + \cdots + hG(s_{N-1}).$$

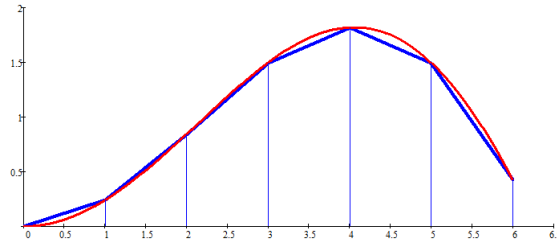
Kui G on lõigul $[a, b]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis keskmise ristkülikvalem (11.13), (11.14) jääkliige avaldub kujul

$$E_N(G) = \frac{b-a}{24} \left(\frac{b-a}{N} \right)^2 G''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (11.15)$$

Trapetsvalem

Valem (11.13) on trapetsvalem, kui $N > 2$ ning sõlmed ja kordajad avalduvad järgmiselt:

$$\begin{aligned} s_j &= a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{N-1}, \quad j = 1, \dots, N, \\ (w_1, \dots, w_N) &= \left(\frac{1}{2}h, h, h, \dots, h, h, \frac{1}{2}h \right). \end{aligned} \quad (11.16)$$



Tuletame valemid (11.16). Olgu meil eisalgseid sõlmed $a = s_1 < s_2 < \cdots < s_N = b$ ühtlase jaotusega, kus $h = (b-a)/N$. Järgnevalt asendame integraali $\int_{s_j}^{s_{j+1}} G(s) ds$ trapetsi pindalaga, mis võrdub kõrguse h ja aluste poolsumma $\frac{G(s_j) + G(s_{j+1})}{2}$ korrutisega,

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} G(s) ds \approx h \frac{G(s_j) + G(s_{j+1})}{2}, \quad j = 1, \dots, N-1.$$

Siit saame avaldada terve integraali üle lõigu $[a, b]$,

$$\int_a^b G(s) ds = \sum_{j=1}^{N-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} G(s) ds \approx \frac{h}{2}G(s_1) + hG(s_2) + \cdots + hG(s_{N-1}) + \frac{h}{2}G(s_N).$$

Kui G on lõigul $[a, b]$ kaks korda pidevalt diferentseeruv, siis trapetsvalemi (11.13), (11.16) jääkliige avaldub kujul

$$E_N(G) = -\frac{b-a}{12} \left(\frac{b-a}{N-1} \right)^2 G'''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (11.17)$$

Simpsoni valem

Valem (11.13) on Simpsoni valem, kui $N \geq 3$ on paaritu täisarv ning sõlmed ja kordajad avalduvad järgmiselt:

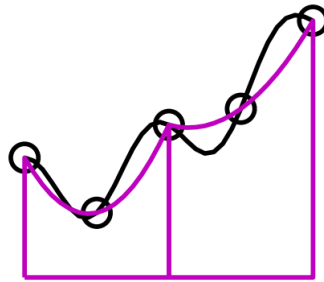
$$s_j = a + (j-1)h, \quad h = \frac{b-a}{N-1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (11.18)$$

$$(w_1, \dots, w_N) = \left(\frac{1}{3}h, \frac{4}{3}h, \frac{2}{3}h, \frac{4}{3}h, \dots, \frac{2}{3}h, \frac{4}{3}h, \frac{1}{3}h \right).$$

Juhul $N = 3$,

$$(w_1, w_2, w_3) = \left(\frac{1}{3}h, \frac{4}{3}h, \frac{1}{3}h \right).$$

Simpsoni valem aproksimeerib funktsiooni ruutpolünoomidega, mis läbivad kolme järjestikulist punkti.



Tuletame valemid (11.18). Olgu meil paaritu arv sõlmi $a = s_1 < s_2 < \dots < s_N = b$ ühtlase jaotusega, kus $h = (b-a)/N$ ja $N \geq 3$. Me lähendame lõigul $[s_j, s_{j+2}]$ integreeritavad funktsiooni $G(s)$ temale vastava interpolatsioonipolünoomiga, näiteks Lagrange'i interpolatsioonipolünoomiga. Simpsoni valemi jaoks piisab kasutada kolme sõlme s_j, s_{j+1}, s_{j+2} ja seega lähendame funktsiooni $G(s)$ vastava ruutpolünoomiga

$$G(s) \approx P(s) = \sum_{k=j}^{j+2} G(s_k) \prod_{\substack{i=j \\ i \neq k}}^{j+2} \frac{s - s_i}{s_k - s_i}, \quad s \in [s_j, s_{j+2}].$$

Seega võime iga $j = 1, \dots, N-1$ korral kirjutada

$$\int_{s_j}^{s_{j+2}} G(s) ds \approx \sum_{k=j}^{j+2} G(s_k) \int_{s_j}^{s_{j+2}} \prod_{\substack{i=j \\ i \neq k}}^{j+2} \frac{s - s_i}{s_k - s_i} ds = \frac{1}{3}hG(s_j) + \frac{4}{3}hG(s_{j+1}) + \frac{1}{3}hG(s_{j+2}).$$

Siit saame avaldada terve integraali üle lõigu $[a, b]$,

$$\begin{aligned} \int_a^b G(s) ds &= \sum_{j=1}^{\frac{N-1}{2}} \int_{s_{2j-1}}^{s_{2j+1}} G(s) ds \\ &\approx \frac{1}{3}hG(s_1) + \frac{4}{3}hG(s_2) + \frac{2}{3}hG(s_3) + \cdots + \frac{4}{3}hG(s_{N-1}) + \frac{1}{3}hG(s_N). \end{aligned}$$

Kui G on lõigul $[a, b]$ neli korda pidevalt diferentseeruv, siis Simpsoni valemite (11.13), (11.18) jääkliige avaldub kujul

$$E_N(G) = -\frac{b-a}{180} \left(\frac{b-a}{N-1} \right)^4 G^{(4)}(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (11.19)$$

Gaussi valem

Valem (11.4) on Gaussi valem, kui sõlmed ja kordajad avalduvad järgmiselt:

$$s_j = \frac{b-a}{2}t_j + \frac{b-a}{2}, \quad w_j = \frac{b-a}{(1-t_j^2)[L'_N(t_j)]^2} \quad j = 1, \dots, N, \quad (11.20)$$

kus t_1, \dots, t_N on Legendre'i polünoomi

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11.21)$$

nullkohad vahemikus $(-1, 1)$ (milline on Legendre'i polünoomi $L_1(t)$ nullkoht t_1 ning millised on Legendre'i polünoomi $L_2(t)$ nullkohad t_1 ja t_2 ?).

Kui G on lõigul $[a, b]$ $2N$ korda pidevalt diferentseeruv, siis Gaussi kvadratuurvalemi jääkliige avaldub kujul

$$E_N(G) = \frac{(b-a)^{2N+1}(N!)^4}{(2N+1)![(2N)!]^2} G^{(2N)}(\xi), \quad \xi \in (a, b). \quad (11.22)$$

Toome ära mõned enam kasutatavad Gaussi kvadratuurvalemiga seotud väärtused (vt. [2]),

N	sõlmed t_i	kaalud w_i
2	$t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$w_1 = 1$
	$t_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$w_2 = 1$
3	$t_1 = -\frac{\sqrt{15}}{5}$	$w_1 = \frac{5}{9}$
	$t_2 = 0$	$w_2 = \frac{8}{9}$
	$t_3 = \frac{\sqrt{15}}{5}$	$w_3 = \frac{5}{9}$
4	$t_1 = -\sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$w_1 = \frac{90-5\sqrt{30}}{180}$
	$t_2 = -\sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$w_2 = \frac{90+5\sqrt{30}}{180}$
	$t_3 = \sqrt{\frac{15-2\sqrt{30}}{35}}$	$w_3 = \frac{90+5\sqrt{30}}{180}$
	$t_4 = \sqrt{\frac{15+2\sqrt{30}}{35}}$	$w_4 = \frac{90-5\sqrt{30}}{180}$

Näide 11.1. Leiame kvadratuurvalemite meetodil võrrandi

$$y(t) - \frac{1}{2} \int_0^1 ts y(s) ds = \frac{5}{6}t, \quad t \in [0, 1],$$

ligikaudse lahendi, võttes aluseks Simpsoni kvadratuurvalemi $N = 3$ korral. Sel juhul

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1}{2}, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{1}{2}, \quad s_3 = 1,$$

ja kordajad w_1, w_2, w_3 avalduvad kujul

$$w_1 = \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}, \quad w_2 = \frac{4}{3}h = \frac{2}{3}, \quad w_3 = \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}.$$

Siis

$$\int_0^1 G(s) ds = \frac{1}{6} (G(0) + 4G(1/2) + G(1)) + E_3(G),$$

kus $E_3(G)$ on Simpsoni valemi jääkliige (11.19) $N = 3$ korral. Koostame lineaarvõrrandite süsteemi (11.9), kus $N = 3$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $K(t, s) = ts$, $f(t) = \frac{5}{6}t$ ning z_1, z_2 ja z_3 on otsitavad. Selleks arvutame suurused

$$\begin{aligned} f_1 &= f(0) = 0, & f_2 &= f(1/2) = \frac{5}{12}, & f_3 &= f(1) = \frac{5}{6}, \\ K_{11} &= K(0, 0) = 0, & K_{12} &= K(0, 1/2) = 0, & K_{13} &= K(0, 1) = 0, \\ K_{21} &= K(1/2, 0) = 0, & K_{22} &= K(1/2, 1/2) = \frac{1}{4}, & K_{23} &= K(1/2, 1) = \frac{1}{2}, \\ K_{31} &= K(1, 0) = 0, & K_{32} &= K(1, 1/2) = \frac{1}{2}, & K_{33} &= K(1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Kasutades saadud suurusi, jõuame võrrandisüsteemini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{12} & -\frac{1}{24} \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{11}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

ehk

$$\begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 22 & -1 \\ 0 & -4 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Leiame, et lahendiks on $z_1 = 0$, $z_2 = 1/2$ ja $z_3 = 1$. Esialgse võrrandi ligikaudse lahendi võime nüüd kirjutada kujul:

$$y_3(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \left(0 + 4t \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + t \right) + \frac{5}{6}t = t, \quad t \in [0, 1].$$

Näeme, et leitud lähilahend $y_3(t) = t$ langeb seekord kokku võrrandi täpse lahendiga $y^*(t) = t$. \diamond

11.4 Lahtised valemid ehk valemid otspunktide jaoks

Väga paljudes valemities tuleb arvutada funktsiooni G väärtusi lõigu otspunktides $a = s_1$ ja $b = s_N$. Kui funktsioon G peaks olema lõigu $[a, b]$ otspunktides halvasti käituv (katkev, mitte eriti sile), siis arvestades seost

$$\int_a^b = \int_a^{s_5} + \int_{s_5}^b,$$

võib näiteks äärmise integraali $\int_a^{s_5}$ välja kirjutada nn. lahtise valemil abil. Näiteks üks Newton-Cotes'i valem:

$$\int_{s_1}^{s_5} G(s) ds = \frac{4}{3}h(2G(s_2) - G(s_3) + 2G(s_4)) + \frac{14}{45}G^{(4)}(\xi)h^5, \quad \xi \in (s_1, s_5). \quad (11.23)$$

Analoogilisi valemid annab genereerida diferentsmeetodite tuletamise peatükis vaa-deldud võttega, kus funktsioon G asendatakse oma interpolatsioonipolünoomiga ja seejärel integreeritakse seda polünoomi vastaval lõigul. Näiteks saab tuletada valemid, kus sõlmed ei asu integreerimislõigu sees:

$$\int_{b-h}^b G(s) ds \approx \frac{h}{12}(23G(b-h) - 16G(b-2h) + 5G(b-3h)). \quad (11.24)$$

Lahtisteks valemiteks on ka parempoolne ja vasakpoolne ristkülikvalem

$$\int_a^{a+h} G(s) ds \approx hG(a+h), \quad \int_{b-h}^b G(s) ds \approx hG(b-h).$$

Märgime, et lahtiste valemite kasutamine koos teiste valemitega annab pärast $G(s_i)$ kordajate kokku kogumist lihtsalt kokkuvõttes mingid teised arvulised väärtused kaaludele w_1, \dots, w_N .

Lõpuks märgime, et kvadratuurvalemina võib kasutada veel mitmeid teisi valemiteid kujul (11.13). Peab vaid iga lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni G korral kehtima seos (11.6). Tarvilikud ja piisavad tingimused selleks on antud järgmise teoreemiga (vt. [3]).

11.5 Kvadratuurprotsessi koondumine

Teoreem 11.3. *Kvadratuurprotsess (11.13) koondub iga lõigul $[a, b]$ pideva funktsiooni G korral parajasti siis, kui leidub selline suurusest N sõltumatu konstant c , et iga $N = 1, 2, \dots$ korral kehtib võrratus*

$$\sum_{j=1}^N |w_j| \leq c \tag{11.25}$$

ning kvadratuurprotsess koondub iga polünoomi G korral.

Viited

- [1] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.
- [4] E. Tamme. Integraalvõrrandite lahendusmeetodid. Tartu, 1989.