

12 Kvadratuurvalemite meetod Volterra integraalvõrrandi jaoks

Sisukord

12 Kvadratuurvalemite meetod Volterra integraalvõrrandi jaoks	117
12.1 Meetodi kirjeldus	117
12.2 Kvadratuurvalemite valik	119
12.3 Mittelineaarne homogeenne Volterra integraalvõrrand	120
12.4 Näiteid	121
12.5 Kvadratuurvalemite meetodi koonduvuskiirus	124
12.6 Nõrgalt singulaarsete tuumadega integraalvõrrandid	126

Enne koonduvusteoreemide juurde minekut vaatleme kvadratuurvalemite meetodi kasutamist Volterra integraalvõrrandi korral.

12.1 Meetodi kirjeldus

Vaatleme lineaarset II liiki Volterra integraalvõrrandit

$$y(t) = \int_a^t K(t, s)y(s) ds + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (12.1)$$

kus $-\infty < a < b < \infty$, $K(t, s)$ on tuum, $f(t)$ vabaliige ja $y(t)$ otsitav funktsioon. Eeldame, et tuum K on pidev funktsioon kolmnurgal

$$D = \{(t, s) : a \leq s \leq t \leq b\} \quad (12.2)$$

ja f on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$. Võrrand (12.1) on siis teoreemi 10.4 põhjal üheselt lahenduv ja tema lahend y on pidev funktsioon lõigul $[a, b]$.

Volterra integraalvõrrand (12.1) on II liiki Fredholmi võrrandi erijuhuks, kui võtta $\lambda = 1$ ja tuum kujul

$$\tilde{K}(t, s) = \begin{cases} K(t, s), & s \leq t \\ 0, & s > t \end{cases}.$$

Seega põhimõtteliselt on Volterra võrrandi (12.1) lahendamisel kasutatav ka eelmistes paragrahvides esitatud meetodid. Küll aga ei ole nende meetodite vahetu rakendamine otstarbekohane järgmistel põhjustel. Vaadeldes Volterra võrrandit Fredholmi võrrandina, saame võrrandi, mille tuum on üldiselt katkev ruudu $[a, b] \times [a, b]$ diagonaalil $s = t$, mistõttu eespool vaadeldud meetodid enamasti koonduvad halvasti. Teiselt poolt saab Volterra võrrandi lahendamiseks konstrueerida spetsiaalseid meetodeid, mis nõuavad hoopis vähem arvutustööd, kui Fredholmi võrrandi lahendusmeetodid. Samuti on Volterra võrrandi jaoks mõistlik kasutada kvadratuurvalemite meetodit veidi muudetud kujul (vt. nt. [2]).

Valime esiteks osalõikude arvu N ja sammupikkuse $h = \frac{b-a}{N-1}$. Moodustame lõigul $[a, b]$ sõlmed

$$t_i = a + (i - 1)h, \quad i = 1, \dots, N. \quad (12.3)$$

Järgnevalt kirjutame esialgse võrrandi (12.1) välja igas sõlmes t_1, \dots, t_N :

$$y(t_i) = \int_a^{t_i} K(t_i, s)y(s) ds + f(t_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (12.4)$$

Integraalide arvutamiseks kasutame kvadratuurvalemiteid kujul

$$\int_a^{t_i} K(t_i, s)y(s) ds = \sum_{j=1}^i W_{ij}K(t_i, t_j)y(t_j) + E_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12.5)$$

kus W_{ij} ($i, j = 1, \dots, N$) on vastavate kvadratuurvalemite kordajad ja E_i jääkliige.

Jättes ära kvadratuurvalemi jääkliikme R_i saame integraalvõrrandi (12.1) lahendi lähisväärtuste $z_i \approx y(t_i)$ ($i = 1, \dots, N$) leidmiseks lineaarvõrrantide süsteemi

$$z_i - \sum_{j=1}^i W_{ij}K_{ij}z_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12.6)$$

kus $z_1 = y(a) = f(a)$ ja

$$K_{ij} = K(t_i, t_j), \quad f_i = f(t_i), \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Kirjutame süsteemi (12.6) välja ka maatrikskujul,

$$\begin{pmatrix} 1 - W_{11}K_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -W_{21}K_{21} & 1 - W_{22}K_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -W_{N-1,1}K_{N-1,1} & -W_{N-1,2}K_{N-1,2} & \cdots & 0 \\ -W_{N1}K_{N1} & -W_{N2}K_{N2} & \cdots & 1 - W_{NN}K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{N-1} \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Selle võrrandisüsteemi võime kirjutada ka kujul

$$(1 - W_{ii}K_{ii})z_i = \sum_{j=1}^{i-1} W_{ij}K_{ij}z_j + f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12.7)$$

milles näeme, et $W_{ii}K_{ii} \neq 1$ korral oleme saanud rekurentsed seosed lähisväärtuste z_i arvutamiseks, s.t. me saame z_i leida samm-sammult z_1, \dots, z_{i-1} abil.

Paraku ei saa me aga seekord otse välja kirjutada Nyströmi lähendit, vaid peame leppima $y(t)$ lähisväärtustega sõlmedes, s.t. väärtustega z_1, \dots, z_N .

12.2 Kvadratuurvalemite valik

Näiteks kasutades igas integraalis $\int_a^{t_i}$ ($i = 1, \dots, N$) trapetsvalemit, saame kaaludeks

$$W_{11} = 0, \quad W_{i1} = W_{ii} = \frac{h}{2}, \quad W_{i2} = \cdots = W_{i,i-1} = h, \quad i = 2, \dots, N,$$

ehk

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{h}{2} & \frac{h}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{h}{2} & h & h & \cdots & \frac{h}{2} & 0 \\ \frac{h}{2} & h & h & \cdots & h & \frac{h}{2} \end{pmatrix}.$$

Näiteks kasutades igas integraalis $\int_a^{t_i}$ ($i = 1, \dots, N$) vasakpoolset ristkülikvalemit, saame kaaludeks

$$W_{11} = 0, \quad W_{ii} = 0, \quad W_{i1} = \cdots = W_{i,i-1} = h, \quad i = 2, \dots, N,$$

ehk

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h & h & h & \cdots & 0 & 0 \\ h & h & h & \cdots & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Näiteks kasutades igas integraalis $\int_a^{t_i}$ ($i = 1, \dots, N$) parempoolset ristkülikvalemit, saame kaaludeks

$$W_{11} = 0, \quad W_{i1} = 0, \quad W_{i2} = \dots = W_{i,i} = h, \quad i = 2, \dots, N,$$

ehk

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & h & h & \dots & h & 0 \\ 0 & h & h & \dots & h & h \end{pmatrix}.$$

Kasutatakse ka teisi, kõrgemat järku kvadratuurvalemeid, kuid siis me ei saa enam diagonaalmaatriksit A ja W . Enamasti peab siis kasutama interpolatsioonitüüpi kvadratuurvalemeid (s.t. integreeritav funktsioon asendatakse vastava interpolatsioonipolünoomiga ja seejärel integreeritakse seda polünoomi üle sobiva integreerimisloigu). Näiteks Simpsoni valemi kasutamise korral saaksime järgmise kaalude maatriksi:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{12}h & \frac{8}{12}h & -\frac{1}{12}h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}h & \frac{4}{3}h & \frac{1}{3}h & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}h & \frac{4}{3}h & (\frac{1}{3} + \frac{5}{12})h & \frac{8}{12}h & -\frac{1}{12}h & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}h & \frac{4}{3}h & (\frac{1}{3} + \frac{1}{3})h & \frac{4}{3}h & \frac{1}{3}h & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{3}h & \frac{4}{3}h & \frac{2}{3}h & \frac{4}{3}h & \frac{2}{3}h & \dots & \frac{1}{3}h & \frac{4}{3}h & (\frac{1}{3} + \frac{5}{12})h & \frac{8}{12}h & -\frac{1}{12}h \\ \frac{1}{3}h & \frac{4}{3}h & \frac{2}{3}h & \frac{4}{3}h & \frac{2}{3}h & \dots & \frac{1}{3}h & \frac{4}{3}h & (\frac{1}{3} + \frac{1}{3})h & \frac{4}{3}h & \frac{1}{3}h \end{pmatrix}.$$

12.3 Mittelineaarne homogeenne Volterra integraalvõrrand

Kvadratuurvalemite meetod on lihtsalt rakendatav ka mittelineaarse homogeenne Volterra võrrandi

$$y(t) = \int_a^t K(t, s, y(s)) ds, \quad t \in [a, b], \quad (12.8)$$

lahendamisel. Analoogiliselt eelnevalt tehtuga kirjutame selle võrrandi välja igas sõlmes t_1, \dots, t_N ja leiame tekkivad integraalid $\int_a^{t_i}$ ($i = 1, \dots, N$) mingi kvadratuursum-

maga. Sedasi saame mittelineaarsete võrrandite süsteemi

$$z_i = \sum_{j=1}^i W_{ij} K(t_i, t_j, z_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad (12.9)$$

tundmatute $z_i \approx y(t_i)$ ($i = 1, \dots, N$) suhtes. Kasutades väärtust $z_1 = y(a) = 0$ tuleb sellest z_2, \dots, z_N leidmisel iga kord lahendada ühe tundmatuga mittelineaarne võrrand.

Algoritm lihtustub oluliselt, kui lähtume kvadratuurvalemitest, milles $W_{ii} = 0$ ($i = 2, \dots, N$). Sellisel juhul saame rekurrentsed seosed väärtuste z_i arvutamiseks. Kõige lihtsama seda tüüpi meetodi annab vasakpoolne ristkülikvalem.

12.4 Näiteid

Näide 12.1. Leiame kvadratuurvalemitest meetodil Volterra võrrandi

$$y(t) - 3 \int_0^t ts y(s) ds = t, \quad t \in [0, 1],$$

ligikaudse lahendi, võttes aluseks trapetsvalemi $N = 4$ korral. Sel juhul

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1}{3}, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{3}, \quad t_3 = \frac{2}{3}, \quad t_4 = 1,$$

ja kaalude maatriks W näeb välja järgmine

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{2} & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ \frac{h}{2} & h & \frac{h}{2} & 0 \\ \frac{h}{2} & h & h & \frac{h}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Tuuma $K(t, s) = 3ts$ väärtused võime kirjutada kujul

$$(K_{ij}) = (3 \cdot t_i \cdot t_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kokkuvõttes oleme saanud lineaarvõrrandite süsteemi (12.6),

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{18} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{14}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mille lahendiks tuleb $z_1 = 0$, $z_2 \approx 0.353$, $z_3 \approx 0.958$ ja $z_4 \approx 3.513$. \diamond

Näide 12.2. Leiame kvadratuurvalemite meetodil Volterra võrrandi

$$y(t) - 3 \int_0^t ts y(s) ds = t, \quad t \in [0, 1],$$

ligikaudse lahendi, võttes aluseks trapetsvalemi $N = 4$ korral ja seekord lahendame seda võrrandit kui Fredholmi võrrandit

$$y(t) - \int_0^1 \begin{cases} 3ts & s \leq t \\ 0 & s > t \end{cases} y(s) ds = t, \quad t \in [0, 1].$$

Sel juhul

$$h = \frac{b-a}{N-1} = \frac{1}{3}, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{1}{3}, \quad t_3 = \frac{2}{3}, \quad t_4 = 1,$$

ja kaalude vektor W näeb välja järgmine

$$W = \left(\frac{h}{2}, h, h, \frac{h}{2} \right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6} \right).$$

Tuuma $K(t, s) = 3ts$ väärtused võime kirjutada kujul

$$(K_{ij}) = (3 \cdot t_i \cdot t_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kokkuvõttes oleme saanud lineaarvõrrandite süsteemi 12.9,

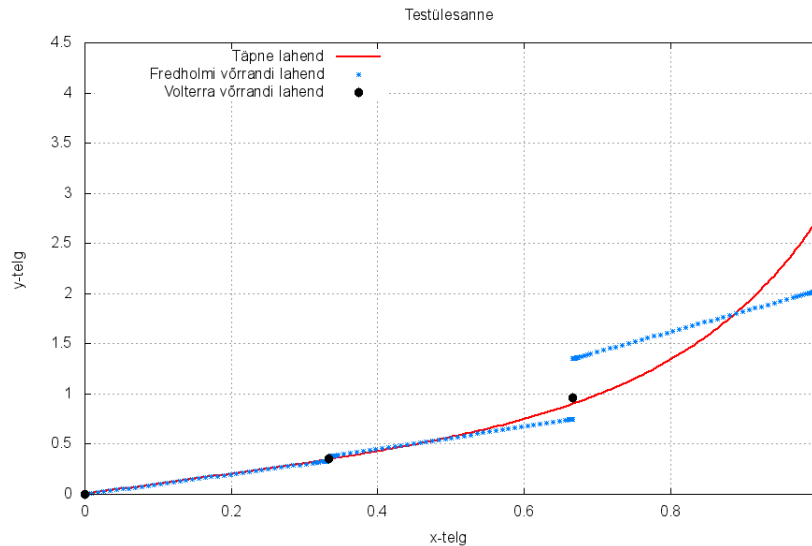
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{9} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

mille lahendiks tuleb $z_1 = 0$, $z_2 = 0.375$, $z_3 = 1.350$ ja $z_4 = 4.050$.

Toome võrdluseks eelmises näites leitud väärtused:

	z_1	z_2	z_3	z_4
Täpne lahend	0	0.346	0.897	2.718
Volterra võrrandi lahend	0	0.353	0.958	3.513
Fredholmi võrrandi lahend	0	0.375	1.350	4.050

Näeme, et antud juhul oli samaväärsse Fredholmi võrrandi lahendamine tunduvalt ebatäpsem. Toome lisaks ühe võrdleva joonise, kus Fredholmi võrrandi lahend on kirjutatud Nyströmi kujul (katkeva tuuma tõttu tekib ka katkev funktsioon):



◇

Näide 12.3. Vaatleme homogeenst mittelinearset Volterra võrrandit

$$y(t) = \int_0^t \frac{1 - y^2(s)}{\cos(s)} ds, \quad t \in [0, 1].$$

Kasutades vasakpoolset ristkülikvalemit, leiame $N = 4$, $h = (b-a)/(N-1) = 1/3$ korral

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ h & h & 0 & 0 \\ h & h & h & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Siit leiame rekursiivselt

$$z_1 = 0,$$

$$z_2 = hK(t_2, t_1, z_1) = \frac{1}{3} \frac{1 - z_1^2}{\cos(0)} \approx 0.333,$$

$$z_3 = hK(t_3, t_1, z_1) + hK(t_3, t_2, z_2) = z_2 + \frac{1}{3} \frac{1 - z_2^2}{\cos(1/3)} \approx 0.647,$$

$$z_4 = hK(t_4, t_1, z_1) + hK(t_4, t_2, z_2) + hK(t_4, t_3, z_3) = z_3 + \frac{1}{3} \frac{1 - z_3^2}{\cos(2/3)} \approx 0.894.$$

Võrrandi täpne lahend on $y(t) = \sin(t)$, mille väärtused sõlmedes on vastavalt $\sin(0) = 0$, $\sin(1/3) \approx 0.327$, $\sin(2/3) \approx 0.618$ ja $\sin(1) \approx 0.841$. ◇

12.5 Kvadratuurvalemite meetodi koonduvuskiirus

Hinnagust (12.12),

$$\max_{i=1,\dots,N} |y^*(s_i) - z_i^*| \leq \max_{t \in [a,b]} |y^*(t) - y_N^*(t)| \leq c \max_{t \in [a,b]} |E_N(K(t, \cdot)y^*(\cdot))|, \quad (12.10)$$

järeldub, et teoreemi 12.2 eeldustel kvadratuurvalemite meetod (12.9),(12.11) koon-
dub:

$$\max_{i=1,\dots,N} |y^*(s_i) - z_i^*| \leq \max_{t \in [a,b]} |y^*(t) - y_N^*(t)| \rightarrow 0, \quad \text{kui } N \rightarrow \infty. \quad (12.11)$$

Hinnangust (12.10) järeldub ka, et koondumine (12.11) on seda kiirem, mida kiirem on suuruse $\max_{t \in [a,b]} |E_N(K(t, \cdot)y^*(\cdot))|$ lähenemine nullile protsessis $N \rightarrow \infty$. Teiste sõnadega, lähislahendi y_N^* viga antud N korral sõltub valitud kvadratuurvalemist (12.4) ning korrutise $K(t, s)y^*(s)$ siledusest fikseeritud $t \in [a, b]$ korral.

Teoreem 12.1. *Olgu K ja f kaks korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid vastavalt ruudul D ja lõigul $[a, b]$ ning olgu võrrandile (12.1) vastaval homogeenisel võrrandil (12.3) olemas vaid triviaalne lahend $y = 0$. Olgu kvadratuurvalem (12.4) keskmine ristkülikvalem, s.t. tema sõlmed s_1, \dots, s_N ja kordajad w_1, \dots, w_N avalduvad kujul (12.14).*

Siis leidub naturaalarv N_0 nii, et iga $N > N_0$ korral kehtib hinnang

$$\max_{i=1,\dots,N} |y^*(s_i) - z_i^*| \leq \max_{t \in [a,b]} |y^*(t) - y_N^*(t)| \leq ch^2, \quad (12.12)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N , $y^(t)$ on võrrandi (12.1) täpne lahend, z_1^*, \dots, z_N^* on leitud võrrandisüsteemist (12.9), milles s_1, \dots, s_N , w_1, \dots, w_N ja h on antud seostega (12.14) ning $y_N^*(t)$ on lahendi $y^*(t)$ lähislahend kujul (12.11), milles $z_1 = z_1^*, \dots, z_N = z_N^*$.*

Tõestus. Olgu kvadratuurvalemiks (12.4) keskmine ristkülikvalem ja olgu tuum K kaks korda pidevalt diferentseeruv ruudul D ning vabaliige f kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$. Siis võrrandi (12.1) lahend y^* on ka kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$.

Tõepoolest, võrrandi (12.1) vahetu diferentseerimise teel leiame lemma 10.2 abil, et

$$y^{*''}(t) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^2 K(t, s)}{\partial t^2} y^*(s) ds + f''(t), \quad t \in [a, b].$$

Siit näeme, et lahendi $y^*(t)$ teine tuletis $y^{*''}(t)$ tõepoolest leidub ja on pidev iga $t \in [a, b]$ korral (miks?). Võrdusest

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 [K(t, s)y^*(s)] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 K(t, s)\right] y^*(s) + 2 \left[\frac{\partial}{\partial s} K(t, s)\right] y^{*'}(s) + K(t, s)y^{*''}(s)$$

järeldub nüüd korrutise $K(t, s)y^*(s)$ siledus: iga fikseeritud $t \in [a, b]$ korral on $K(t, s)y^*(s)$ kui muutuja s funktsioon kaks korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$. Veelgi enam, leidub selline konstant c , et iga $(t, s) \in D$ korral

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 [K(t, s)y^*(s)]\right| \leq c. \quad (12.13)$$

Keskmise ristkülikvalemi jääkliikme avaldise (12.15) põhjal saame iga fikseeritud $t \in [a, b]$ korral välja kirjutada jääkliikme avaldise funktsiooni $G(s) = K(t, s)y^*(s)$ jaoks:

$$E_N(K(t, \cdot)y^*(\cdot)) = \frac{b-a}{24} \left(\frac{b-a}{N}\right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 [K(t, s)y^*(s)] \Big|_{s=\xi}, \quad \xi \in [a, b].$$

Hinnagu (12.13) tõttu järeldub siit, et

$$\max_{t \in [a, b]} |E_N(K(t, \cdot)y^*(\cdot))| \leq c_1 \left(\frac{b-a}{N}\right)^2 = c_1 h^2, \quad (12.14)$$

kus c_1 on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N . Tuginedes teoreemile 12.2 ja hinnangule (12.14) oleme jõudnud teoreemi väiteni. \square

Toetudes teoreemile 12.2 saame teoreemiga 12.1 analoogilised tulemused esitada ka mitmesuguste teiste kvadratuurvalemite jaoks. Näiteks trapets- ja Simpsoni valemite kasutamise korral võime tulemuse formuleerida järgmiste teoreemidena, mille tõestused jätame lugeja hooleks.

Teoreem 12.2. *Olgu K ja f kaks korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid vastavalt ruudul D ja lõigul $[a, b]$ ning olgu võrrandile (12.1) vastaval homogeenisel võrrandil (12.3) olemas vaid triviaalne lahend $y = 0$. Olgu kvadratuurvalem (12.4) trapetsvalem, s.t. tema sõlmed s_1, \dots, s_N ja kordajad w_1, \dots, w_N avalduvad kujul (12.16).*

Siis leidub naturaalarv N_0 nii, et iga $N > N_0$ korral kehtib hinnang

$$\max_{i=1, \dots, N} |y^*(s_i) - z_i^*| \leq \max_{t \in [a, b]} |y^*(t) - y_N^*(t)| \leq c h^2, \quad (12.15)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N , $y^(t)$ on võrrandi (12.1) täpne lahend, z_1^*, \dots, z_N^* on leitud võrrandisüsteemist (12.9), milles s_1, \dots, s_N , w_1, \dots, w_N ja h on antud seostega (12.16) ning $y_N^*(t)$ on lahendi $y^*(t)$ lähislahend kujul (12.11), milles $z_1 = z_1^*, \dots, z_N = z_N^*$.*

Teoreem 12.3. Olgu K ja f neli korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid vastavalt ruudul D ja lõigul $[a, b]$ ning olgu võrrandile (12.1) vastaval homogeenisel võrrandil (12.3) olemas vaid triviaalne lahend $y = 0$. Olgu kvadratuurvalem (12.4) Simpsoni valem, s.t. tema sõlmed s_1, \dots, s_N ja kordajad w_1, \dots, w_N avalduvad kujul (12.18), $N \geq 3$ on paaritu arv.

Siis leidub naturaalarv N_0 nii, et iga $N > N_0$ korral kehtib hinnang

$$\max_{i=1, \dots, N} |y^*(s_i) - z_i^*| \leq \max_{t \in [a, b]} |y^*(t) - y_N^*(t)| \leq ch^4, \quad (12.16)$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N , $y^*(t)$ on võrrandi (12.1) täpne lahend, z_1^*, \dots, z_N^* on leitud võrrandisüsteemist (12.9), milles s_1, \dots, s_N , w_1, \dots, w_N ja h on antud seostega (12.18) ning $y_N^*(t)$ on lahendi $y^*(t)$ lähilahend kujul (12.11), milles $z_1 = z_1^*, \dots, z_N = z_N^*$.

Märkus 12.1. Kvadratuurvalemite meetodi abil leitud lähilahend $y_N^*(t)$ võib osutada vaadeldava võrrandi täpseks lahendiks $y^*(t)$.

12.6 Nõrgalt singulaarsete tuumadega integraalvõrrandid

Rakendustes tekivad sageli integraalvõrrandid kujul (12.1), mille tuumal $K(t, s)$ on kuju

$$K(t, s) = K_1(t, s) \log |t - s| + K_2(t, s), \quad (12.17)$$

$$K(t, s) = K_1(t, s)|t - s|^{-\alpha} + K_2(t, s), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (12.18)$$

kus K_1 ja K_2 on mingid pidevad funktsioonid ruudul D , (vt. [1]). Kuna seoste (12.17) ja (12.18) puhul tuum $K(t, s)$ ei ole määratud $t = s$ korral, siis eespool vaadeldud kvadratuurvalemite meetod ei ole vahetult rakendatav, sest süsteemi (12.9) koostamisel on vaja kasutada ka väärtusi $K(s_i, s_i)$, $i = 1, \dots, N$. Tuumade (12.17) ja (12.18) korral võime võrrandisüsteemi (12.9) asemel lahendada võrrandisüsteemi

$$z_i - \lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_j K_{ij} z_j = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12.19)$$

milles on kasutatud sama tähistust nagu võrrandisüsteemi (12.9) puhul: $K_{ij} = K(s_i, s_j)$, $f_i = f(s_i)$ ($i, j = 1, \dots, N$), s_1, \dots, s_N ja w_1, \dots, w_N on vastavalt kvadratuurvalem (12.4) sõlmed ja kordajad ning z_1, \dots, z_N on otsitavad.

Leides viimasest süsteemist suurused z_1, \dots, z_N , saame võrrandi (12.1) lähislahendi kirjutada kujul

$$y_N(t) = \lambda \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^N w_j K(t, s_j) z_j, \quad t \neq s_i, \quad i = 1, \dots, N \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_j K(t, s_j) z_j, \quad t = s_i, \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right\} + f(t), \quad t \in [a, b]. \quad (12.20)$$

Seose (12.20) abil leitud lähislahendid $y_N(t)$ koonduvad tuumade (12.17) ja (12.18) korral reeglina väga aeglaselt võrrandi (12.1) täpseks lahendiks protsessis $N \rightarrow \infty$. Lähislahendite koonduvuskiirust saab mõnevõrra tõsta, kui meetodit (12.19), (12.20) rakendada võrrandiga (12.1) samaväärsele (kuid teise kujuga) võrrandile

$$y(t) - \lambda \int_a^b K(t, s)(y(s) - y(t)) ds - \lambda y(t) \int_a^b K(t, s) ds = f(t). \quad (12.21)$$

Viimasest võrrandis teine integraal ei sõltu otsitavast y , esimeses integraalis on aga integreeritav funktsioon $K(t, s)(y(s) - y(t))$ siledam kui vastav funktsioon $K(t, s)y(s)$ lähtevõrrandis (12.1), sest $y(s) - y(t)$ võrdub nulliga ruudu D diagonaalil $t = s$. Seega tuumade (12.17) ja (12.18) korral võime võrrandisüsteemi (12.9) asemel lahendada võrrandisüsteemi

$$z_i - \lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_j K_{ij}(z_j - z_i) - \lambda z_i \int_a^b K(s_i, s) ds = f_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (12.22)$$

milles s_1, \dots, s_N ja w_1, \dots, w_N on vastavalt kvadratuurvalemi (12.4) sõlmed ja korrajad ning z_1, \dots, z_N on otsitavad. Leides viimasest võrrandisüsteemist suurused z_1, \dots, z_N , võime võrrandi (12.1) lähislahendi $y_N(t)$ defineerida analoogiliselt seostele (12.20):

$$y_N(t) = \frac{\lambda \sum_{j=1}^N w_j K(t, s_j) z_j + f(t)}{1 + \lambda \sum_{j=1}^N w_j K(t, s_j) - \lambda \int_a^b K(t, s) ds}, \quad t \neq s_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [a, b], \quad (12.23)$$

$$y_N(t) = \frac{\lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_j K(t, s_j) z_j + f(t)}{1 + \lambda \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N w_j K(t, s_j) - \lambda \int_a^b K(t, s) ds}, \quad t = s_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad t \in [a, b],$$

(12.24)

Osutub, et tuumade (12.17) ja (12.18) puhul selliselt leitud lähislahendid $y_N(t)$ koonduvad võrrandi (12.1) täpseks lahendiks protsessis $N \rightarrow \infty$ reeglina palju kiiremini kui seose (12.20) abil leitud lähislahendid $y_N(t)$.

Viited

- [1] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.
- [2] E. Tamme. Integraalvõrrandite lahendusmeetodid. Tartu, 1989.