Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

13 Projektsioonimeetodid

Sisukord

13.1 Projektsioonimeetodi idee

Vaatleme lineaarset Fredholmi II liiki integraalvõrrandit

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)y(s)\,ds + f(t), \quad t \in [a,b]. \tag{13.1}$$

Projektsioonimeetodi idee on otsida võrrandi (13.1) lähislahendit y_n lõpliku summa kujul

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t), \quad t \in [a,b], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{13.2}$$

kus $c_1, \ldots, c_n$ on mingid tundmatud konstandid (viimaste teada saamisel ongi lähislahend leitud) ja $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ on meie poolt valitud lõigul (a,b) lineaarselt sõltumatud funktsioonid (koordinaatfunktsioonid). Sageli võetakse järgmised funktsioonid:

1. astmefunktsioonid $1, t, t^2, \ldots, t^{n-1}$,

$$\varphi_j(t) = t^{j-1}, \quad j = 1, \ldots, n;$$

2. trignomeetrilised funktsioonid

$$1, \sin(t), \cos(t), \sin(2t), \cos(2t), \ldots;$$

3. splainid (arvutusmatemaatikas väga levinud matemaatilised objektid) ehk tükiti polünomiaalsed funktsioonid lõigul $[a, b]$;

4. lainekesed (*wavelets*).

Asetades lähislahendi $y_n(t)$ võrrandisse (13.1), tekib mingi viga $E_n(t)$:

$$E_n(t) = y_n(t) - \int\limits_a^b K(t,s) y_n(s)\, ds - f(t), \quad t \in [a, b]. \tag{13.3}$$

Põhiprobleemiks on leida n erinevat tingimust tundmatute konstantide $c_1, \dots, c_n$ määramiseks, kusjuures nii, et viga $E_n(t)$ oleks võimalikult väike.

Enamlevinud projektsioonimeetodid on näiteks kollokatsioonimeetod ja Galjorkini meetod.

Märkus 13.1. *Projektsioonimeetodite korral on arutlusskeem lihtne, kuid meetodi rakendamiseks on vaja leida integraale. Et saada efektiivseid lahendusalgoritme, tuleks antud integraalid leida numbriliselt (näiteks kvadratuurvalemitega). Sellega tulevad juurde vastavad arvutusvead, mida peab meetodite valikul samuti arvestama.*

13.2 Kollokatsioonimeetod

Anname ette lõigul $[a, b]$ lineaarselt sõltumatud pidevad funktsioonid $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C[a, b]$. Lahendit y_n otsime kujul

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t), \quad t \in [a, b], \tag{13.4}$$

kus $c_1, \dots, c_n$ on mingid tundmatud konstandid. Asetame y_n algsesse võrrandisse (13.1),

$$E_n(t) := y_n(t) - \int\limits_a^b K(t,s) y_n(s)\, ds - f(t), \quad t \in [a, b], \tag{13.5}$$

ehk

$$E_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\varphi_j(t) - \int\limits_a^b K(t,s) \varphi_j(s)\, ds \right) - f(t), \quad t \in [a, b]. \tag{13.6}$$

Kollokatsioonimeetodi jaoks on vaja moodustada kollokatsioonisõlmed,

$$a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b. \tag{13.7}$$

Nõuame, et võrrand (13.1) kehtiks kõikides kollokatsioonisõlmedes ehk

$$E_n(t_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left(\varphi_j(t_i) - \int\limits_a^b K(t_i, s)\varphi_j(s)\, ds \right) = f(t_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Viimane kehtib, kui

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13.8}$$

kus $f_i = f(t_i)$ ja kordajad a_{ij} on leitavad seostega

$$a_{ij} = \varphi_j(t_i) - \int\limits_a^b K(t_i, s)\varphi_j(s)\, ds, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{13.9}$$

Võrrandid (13.8) kujutavad endast lineaarvõrrandite süsteemi tundmatute $c_1, \ldots, c_n$ suhtes.

Märgime, et Volterra integraalvõrrandi korral jääb kogu skeem samaks, veidi muutuvad vaid võrrandite süsteemi (13.8) kordajad (13.9):

$$\tilde{a}_{ij} = \varphi_j(t_i) - \int\limits_a^{t_i} K(t_i, s)\varphi_j(s)\, ds, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{13.10}$$

Näide 13.1. Vaatleme juba tuntud lihtsat Fredholmi integraalvõrrandit

$$y(t) = \int\limits_0^1 ts\, y(s)\, ds + e^t - t, \quad t \in [0, 1].$$

Võtame kollokatsioonimeetodis $n = 3$, siis $h = 1/(n-1) = 1/2$ ja kollokatisoonipunktideks on sõlmed $t_1 = 0, t_2 = 1/2, t_3 = 1$. Baasfunktsioonideks võtame astmefunktsioonid $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ ja $\varphi_3(t) = t^2$. Sel juhul lähislahend $y_3(t)$ on leitav seosega

$$y_3(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2.$$

Leiame lineaarvõrrandite süsteemi kordajad

$$a_{11} = \varphi_1(t_1) - \int\limits_0^1 t_1 s \varphi_1(s)\, ds = 1,$$

$$a_{12} = \varphi_2(t_1) - \int_0^1 t_1 s\varphi_2(s)\, ds = 0,$$

$$a_{13} = \varphi_3(t_1) - \int_0^1 t_1 s\varphi_3(s)\, ds = 0,$$

$$a_{21} = \varphi_1(t_2) - \int_0^1 t_2 s\varphi_1(s)\, ds = 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 s\, ds = 3/4,$$

$$a_{22} = \varphi_2(t_2) - \int_0^1 t_2 s\varphi_2(s)\, ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 s\, s\, ds = 1/3,$$

$$a_{23} = \varphi_3(t_2) - \int_0^1 t_2 s\varphi_3(s)\, ds = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 ss^2\, ds = 1/8,$$

$$a_{31} = \varphi_1(t_3) - \int_0^1 t_3 s\varphi_1(s)\, ds = 1 - \int_0^1 s\, ds = 1/2,$$

$$a_{32} = \varphi_2(t_3) - \int_0^1 t_3 s\varphi_2(s)\, ds = 1 - \int_0^1 s\, s\, ds = 2/3,$$

$$a_{33} = \varphi_3(t_3) - \int_0^1 t_3 s\varphi_3(s) = 1 - \int_0^1 s\, s^2\, ds = 3/4.$$

Seega saime lineaarvõrrandite süsteemi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{e} - \frac{1}{2} \\ e - 1 \end{pmatrix},$$

mille lahendiks on $c_1 = 1.0000$, $c_2 \approx 0.8805$ ja $c_3 = 0.8417$ ja seega lähislahend y_n avaldub kujul

$$y_3(t) = 1 + 0.8805 \cdot t + 0.8417 \cdot t^2.$$

Märgime, et võrrandi täpne lahend on $y(t) = e^t$ ja $y(1) - y_3(1) \approx 0.0039$ ja $y(0.5) - y_3(0.5) \approx 0.0020$. $\diamond$

Märkus 13.2. *Kollokatsioonimeetod on väga levinud just nõrgalt singulaarsete integraalvõrrandite korral, kus kvadratuurvalemite meetod enam hästi ei tööta. Samuti eelistatakse kollokatsioonimeetodit näiteks keerulistes mitmemõõtmelistes piirkondades, kuna vastava interpolatsiooniruumi moodustamine on enamasti lihtsam kui kvadratuurvalemite konstrueerimine.*

13.3 Galjorkini meetod

Valime lõigul (a, b) lineaarselt sõltumatud funktsioonid $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Seega lähislahendit y_n otsime kujul

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t), \tag{13.11}$$

kus $c_1, \ldots, c_n$ on tundmatud konstandid, mis leitakse järgmise skeemiga.

Valime lõigul (a, b) lineaarselt sõltumatud funktsioonid $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ja nõuame, et viga $E_n(t)$ oleks ortogonaalne kõigi funktsioonidega $\phi_1, \ldots, \phi_n$ ehk

$$\int_a^b \phi_i(s) E_n(s)\, ds = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13.12}$$

Viimased võrrandid saab pikemalt välja kirjutada,

$$\int_a^b \phi_i(s) \left(y_n(s) - \int_a^b K(s, x) y_n(x)\, dx - f(s) \right) ds = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13.13}$$

ehk

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{13.14}$$

Viimases lineaarvõrrandite süsteemis on kordajad kujul

$$f_i = \int_a^b \phi_i(s) f(s)\, ds, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{13.15}$$

ja

$$a_{ij} = \int_a^b \phi_i(s) \varphi_j(s)\, ds - \int_a^b \phi_i(s) \int_a^b K(s, x) \varphi_j(x)\, dx\, ds, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{13.16}$$

Märgime, et Volterra võrrandi korral tulevad kordajad (13.16) kujul

$$\tilde{a}_{ij} = \int_a^b \phi_i(s) \varphi_j(s)\, ds - \int_a^b \phi_i(s) \int_a^s K(s, x) \varphi_j(x)\, dx\, ds, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{13.17}$$

Märkus 13.3. *Kuigi üldjuhul on baasifunktsioonid $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ erinevad, siis tihti on mugavam kasutada samu funktsioone, s.t. $\varphi_1(t) = \phi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) = \phi_n(t)$.*

Märkus 13.4. *Kuna kordajate a_{ij} leidmisel tuleb teha väga palju integreerimisi, siis praktikas on Galjorkini meetod vähem levinud kui kollokatsioonimeetod. Arvutusmahtu annab vähendada baasifunktsioonide $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ja $\phi_1, \ldots, \phi_n$ täpse valikuga (näiteks valides integraaloperaatori T omafunktsioonidest moodustatud ortonormeeritud baasi). Galjorkini meetodi eeliseks on kasutatava ortogonaalprojektsiooni lihtsus ja Hilberti ruumi struktuuri ärakasutamine.*

Näide 13.2. Vaatleme kollokatsioonimeetodi juures toodud Fredholmi integraalvõrrandit

$$y(t) = \int_0^1 ts\, y(s)\, ds + e^t - t, \quad t \in [0, 1].$$

Võtame Galjorkini meetodis $n = 3$. Baasfunktsioonideks võtame astmefunktsioonid $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ ja $\varphi_3(t) = t^2$. Sel juhul lähislahend $y_3(t)$ on leitav seosega

$$y_3(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2.$$

Kasutame funktsioonide $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)$ rollis samu funktsioone $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$. Leiame lineaarvõrrandite süsteemi

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{i3}c_3 = f_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

kordajad:

$$f_1 = \int_0^1 \varphi_1(s) f(s)\, ds = \int_0^1 (e^s - s)\, ds \approx 1.2183,$$

$$f_2 = \int_0^1 \varphi_2(s) f(s)\, ds = \int_0^1 s(e^s - s)\, ds \approx 0.6667,$$

$$f_3 = \int_0^1 \varphi_3(s) f(s)\, ds = \int_0^1 s^2(e^s - s)\, ds \approx 0.4683,$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 \varphi_1(s)\varphi_1(s)\, ds - \int_0^1 \varphi_1(s) \int_0^1 \varphi_1(t) K(s,t)\, dt\, ds \\ &= \int_0^1 1\, ds - \int_0^1 \int_0^1 s\, t\, dt\, ds = 0.7500, \end{aligned}$$

$$a_{12} = \int_0^1 \varphi_1(s)\varphi_2(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_1(s) \int_0^1 \varphi_2(t)K(s,t)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1 s\,ds - \int_0^1 \int_0^1 t\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.3333,$$

$$a_{13} = \int_0^1 \varphi_1(s)\varphi_3(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_1(s) \int_0^1 \varphi_3(t)K(s,t)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1 s^2\,ds - \int_0^1 \int_0^1 t^2\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.2083,$$

$$a_{21} = \int_0^1 \varphi_2(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_2(s) \int_0^1 \varphi_1(t)K(s,t)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1 s\,ds - \int_0^1 s \int_0^1 s\,t\,dt\,ds = 0.3333,$$

$$a_{22} = \int_0^1 \varphi_2(s)\varphi_2(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_2(s) \int_0^1 \varphi_2(t)K(s,t)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1 s\,s\,ds - \int_0^1 s \int_0^1 t\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.2222,$$

$$a_{23} = \int_0^1 \varphi_2(s)\varphi_3(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_2(s) \int_0^1 \varphi_3(t)K(s,t)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1 s\,s^2\,ds - \int_0^1 s \int_0^1 t^2\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.1667,$$

$$a_{31} = \int_0^1 \varphi_3(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_3(s) \int_0^1 \varphi_1(t)K(s,t)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1 s^2\,ds - \int_0^1 s^2 \int_0^1 s\,t\,dt\,ds = 0.2083,$$

$$a_{32} = \int_0^1 \varphi_3(s)\varphi_2(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_3(s) \int_0^1 \varphi_2(t)K(s,t)\,dt\,ds$$

$$= \int_0^1 s^2\,s\,ds - \int_0^1 s^2 \int_0^1 t\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.1667,$$

$$a_{33} = \int_0^1 \varphi_3(s)\varphi_3(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_3(s) \int_0^1 \varphi_3(t)K(s,t)\,dt\,ds$$
$$= \int_0^1 s^2\,s^2\,ds - \int_0^1 s^2 \int_0^1 t^2\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.1375.$$

Seega saime lineaarvõrrandite süsteemi

$$\begin{pmatrix} 0.7500 & 0.3333 & 0.2083 \\ 0.3333 & 0.2222 & 0.1667 \\ 0.2083 & 0.1667 & 0.1375 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2183 \\ 0.6667 \\ 0.4683 \end{pmatrix},$$

mille lahendiks on $c_1 \approx 1.0123$, $c_2 \approx 0.8555$ ja $c_3 = 0.8351$ ja seega lähislahend y_n avaldub kujul

$$y_3(t) = 1.0123 + 0.8555 \cdot t + 0.8351 \cdot t^2.$$

Märgime, et võrrandi täpne lahend on $y(t) = e^t$ ja $y(1) - y_3(1) \approx 0.0154$ ja $y(0.5) - y_3(0.5) \approx -8.3 \times 10^{-5}$. $\diamond$

Näide 13.3. Vaatleme Volterra integraalvõrrandit

$$y(t) = 3\int_0^t ts\,y(s)\,ds + t, \quad t \in [0,1].$$

Võtame Galjorkini meetodis $n = 3$. Baasfunktsioonideks võtame astmefunktsioonid $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$ ja $\varphi_3(t) = t^2$. Sel juhul lähislahend $y_3(t)$ on leitav seosega

$$y_3(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2.$$

Kasutame funktsioonide $\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t)$ rollis samu funktsioone $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$. Leiame lineaarvõrrandite süsteemi

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + a_{i3}c_3 = f_i, \quad i = 1,2,3,$$

kordajad:

$$f_1 = \int_0^1 \varphi_1(s)f(s)\,ds = \int_0^1 s\,ds = 0.5000,$$

$$f_2 = \int_0^1 \varphi_2(s)f(s)\,ds = \int_0^1 s\,s\,ds \approx 0.3333,$$

$$f_3 = \int\limits_0^1 \varphi_3(s) f(s)\, ds = \int\limits_0^1 s^2\, s\, ds = 0.2500,$$

$$a_{11} = \int\limits_0^1 \varphi_1(s)\varphi_1(s)\, ds - \int\limits_0^1 \varphi_1(s) \int\limits_0^s \varphi_1(t) K(s,t)\, dt\, ds$$

$$= \int\limits_0^1 1\, ds - 3 \int\limits_0^1 \int\limits_0^s s\, t\, dt\, ds = 0.6250,$$

$$a_{12} = \int\limits_0^1 \varphi_1(s)\varphi_2(s)\, ds - \int\limits_0^1 \varphi_1(s) \int\limits_0^s \varphi_2(t) K(s,t)\, dt\, ds$$

$$= \int\limits_0^1 s\, ds - 3 \int\limits_0^1 \int\limits_0^s t\, s\, t\, dt\, ds \approx 0.3000,$$

$$a_{13} = \int\limits_0^1 \varphi_1(s)\varphi_3(s)\, ds - \int\limits_0^1 \varphi_1(s) \int\limits_0^s \varphi_3(t) K(s,t)\, dt\, ds$$

$$= \int\limits_0^1 s^2\, ds - 3 \int\limits_0^1 \int\limits_0^s t^2\, s\, t\, dt\, ds \approx 0.2083,$$

$$a_{21} = \int\limits_0^1 \varphi_2(s)\varphi_1(s)\, ds - \int\limits_0^1 \varphi_2(s) \int\limits_0^s \varphi_1(t) K(s,t)\, dt\, ds$$

$$= \int\limits_0^1 s\, ds - 3 \int\limits_0^1 s \int\limits_0^s s\, t\, dt\, ds = 0.2000,$$

$$a_{22} = \int\limits_0^1 \varphi_2(s)\varphi_2(s)\, ds - \int\limits_0^1 \varphi_2(s) \int\limits_0^s \varphi_2(t) K(s,t)\, dt\, ds$$

$$= \int\limits_0^1 s\, s\, ds - 3 \int\limits_0^1 s \int\limits_0^s t\, s\, t\, dt\, ds \approx 0.1667,$$

$$a_{23} = \int\limits_0^1 \varphi_2(s)\varphi_3(s)\, ds - \int\limits_0^1 \varphi_2(s) \int\limits_0^s \varphi_3(t) K(s,t)\, dt\, ds$$

$$= \int\limits_0^1 s\, s^2\, ds - 3 \int\limits_0^1 s \int\limits_0^s t^2\, s\, t\, dt\, ds \approx 0.1429,$$

$$
\begin{aligned}
a_{31} &= \int_0^1 \varphi_3(s)\varphi_1(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_3(s)\int_0^s \varphi_1(t)K(s,t)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 s^2\,ds - 3\int_0^1 s^2 \int_0^s s\,t\,dt\,ds = 0.0833, \\
a_{32} &= \int_0^1 \varphi_3(s)\varphi_2(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_3(s)\int_0^s \varphi_2(t)K(s,t)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 s^2\,s\,ds - 3\int_0^1 s^2 \int_0^s t\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.1071, \\
a_{33} &= \int_0^1 \varphi_3(s)\varphi_3(s)\,ds - \int_0^1 \varphi_3(s)\int_0^s \varphi_3(t)K(s,t)\,dt\,ds \\
&= \int_0^1 s^2\,s^2\,ds - 3\int_0^1 s^2 \int_0^s t^2\,s\,t\,dt\,ds \approx 0.1063.
\end{aligned}
$$

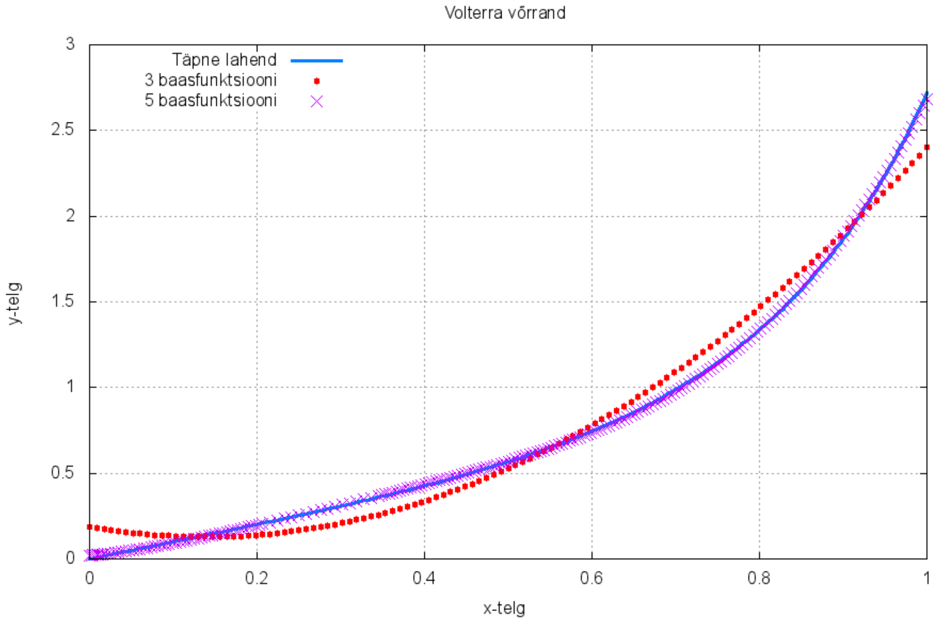
Seega saime lineaarvõrrandite süsteemi

$$
\begin{pmatrix} 0.6250 & 0.3000 & 0.2083 \\ 0.2000 & 0.1667 & 0.1429 \\ 0.0833 & 0.1071 & 0.1063 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =
\begin{pmatrix} 0.5000 \\ 0.3333 \\ 0.2500 \end{pmatrix},
$$

mille lahendiks on $c_1 \approx 0.1875$, $c_2 \approx -0.8486$ ja $c_3 = 3.0599$ ja seega lähislahend y_n avaldub kujul

$$
y_3(t) = 0.1875 - 0.8486 \cdot t + 3.0599 \cdot t^2.
$$

Märgime, et võrrandi täpne lahend on $y(t) = te^{t^3}$ ja $y(0) - y_3(0) \approx -0.1875$, $y(0.5) - y_3(0.5) \approx 0.0384$ ning $y(1) - y_3(1) \approx 0.3195$. Antud juhul on viga päris suur, olukord paraneb oluliselt baasfunktsioonide arvu suurendamisel.



◇

Viited

[1] A. J. Jerri. Introduction to Integral Equations with applications. Wiley, New York, 1999.

[2] E. Tamme. Integraalvõrrandite lahendusmeetodid. Tartu, 1989.