

14 Spline-Kollokatsioonimeetod

Sisukord

14 Spline-Kollokatsioonimeetod	140
14.1 Meetodi idee	141
14.2 Treppfunktsioonid	142
14.3 Näide halvasti käituvatest funktsioonidest	144
14.4 Splaini mõiste	145
14.5 Lineaarsed baassplained	146

Paljud arvutusmatemaatika meetodid tuginevad funktsioonide lähendamisele lihtsamate funktsioonidega. Funktsiooni $y(t)$ lähendit lõigul $[a, b]$ võime otsida näiteks m -astme polünoomina kujul

$$y(t) \approx \Phi(t) = c_0 + c_1 t + \dots + c_m t^m, \quad t \in [a, b].$$

Polünoomi $\Phi(t)$ kordajad c_0, c_1, \dots, c_m võime määrata tingimusest nii, et $\Phi(t)$ väärtused ühtiksid funktsiooni $y(t)$ väärtustega etteantud sõlmedes $t_1, t_2, \dots, t_n \in [a, b]$. Väikese lõigu $[a, b]$ korral õnnestub sellisel teel saada häid lähendeid juba üsna madala astme polünoomidena, suure lõigu korral ei anna ka küllalt kõrge astme polünoomide kasutamine enamasti rahuldavaid tulemusi. Näiteks võib lahend käituda lõigu erinevates piirkondades väga erinevalt, kord lineaarselt, siis jälle eksponentsiaalselt, mingis kolmandas piirkonnas kiiresti võnkuda jne.

Seetõttu osutub palju paindlikumaks meetodiks lähendada igal osalõigul $[t_{i-1}, t_i] \in [a, b]$ ($i = 2, \dots, n$) funktsiooni $y(t)$ erineva polünoomiga.

14.1 Meetodi idee

Vaatleme lineaarset Fredholmi II liiki integraalvõrrandit

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)y(s) ds + f(t), \quad t \in [a, b], \quad (14.1)$$

kus tuum $K(t, s)$ on pidev ruudul $[a, b] \times [a, b]$ ja vabaliige $f(t)$ pidev lõigul $[a, b]$.

Anneme ette lõigul $[a, b]$ lineaarselt sõltumatud splineid (tuleme nende valiku juurde kohe järgmistes punktides) $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$. Lahendit y_n otsime kujul

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(t), \quad t \in [a, b], \quad (14.2)$$

kus c_1, \dots, c_n on mingid tundmatud konstandid.

Asetame y_n algsesse võrrandisse (14.1),

$$E_n(t) := y_n(t) - \int_a^b K(t, s)y_n(s) ds - f(t), \quad t \in [a, b], \quad (14.3)$$

ehk

$$E_n(t) = \sum_{j=1}^n c_j \left(\varphi_j(t) - \int_a^b K(t, s)\varphi_j(s) ds \right) - f(t), \quad t \in [a, b]. \quad (14.4)$$

Kollokatsioonimeetodi jaoks on vaja moodustada kollokatsioonisõlmed. Vaatleme lihtsuse huvides ainult ühtlaselt jaotatud võrku

$$t_i = a + (i-1)h, \quad h = \frac{b-a}{n-1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (14.5)$$

Nõuame, et võrrand (14.1) kehtiks kõikides kollokatsioonisõlmedes ehk

$$\sum_{j=1}^n c_j \left(\varphi_j(t_i) - \int_a^b K(t_i, s)\varphi_j(s) ds \right) = f(t_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Viimane kehtib, kui

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}c_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14.6)$$

kus $f_i = f(t_i)$ ja kordajad a_{ij} on leitavad seostega

$$a_{ij} = \varphi_j(t_i) - \int_a^b K(t_i, s)\varphi_j(s) ds, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (14.7)$$

Võrrandid (14.6) kujutavad endast lineaarvõrrandite süsteemi tundmatute c_1, \dots, c_n suhtes.

Märgime, et splineid võetakse enamasti nii, et kehtib omadus $\varphi_j(t_i) = 1$, kui $i = j$ ja muul juhul $\varphi_j(t_i) = 0$, $i \neq j$. Sel juhul saame võrrandite süsteemi

$$c_i - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14.8)$$

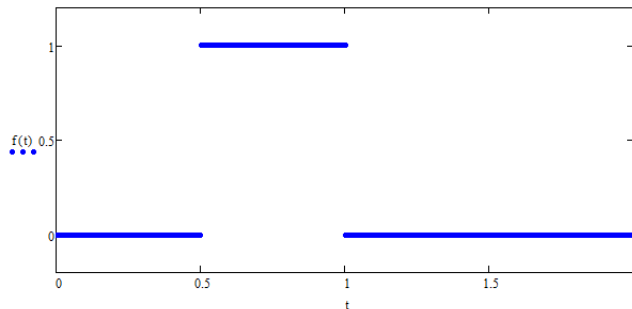
kus kordajad \tilde{a}_{ij} on leitavad seostega

$$\tilde{a}_{ij} = \int_a^b K(t_i, s) \varphi_j(s) ds, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (14.9)$$

14.2 Treppfunktsioonid

Üheks kõige lihtsamaks meetodiks on valida funktsioonide $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ rolli parempool-
sed treppfunktsioonid

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1 & , t = a \\ 0 & , t \neq a \end{cases}, \quad \varphi_i(t) = \begin{cases} 1 & , t \in (t_{i-1}, t_i] \\ 0 & , t \notin (t_{i-1}, t_i] \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (14.10)$$



Märgime, et $\varphi_1(t)$ on nullist erinev ainult punktis a ja on teistest baasfunktsiooni-
dest erinev. Funktsioonid $\varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ on nullist erinevad ainult nendele vastavates
osalõikudes. Seega kehtib omadus

$$\varphi_i(t_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}.$$

Märgime veel, et kui me mingit funktsiooni $G(s)$ korrutame sellise treppfunktsiooniga
 $\varphi_i(s)$, siis integreerimise jaoks kehtivad lihtsustused

$$\int_a^b G(s) \varphi_1(s) ds = 0, \quad \int_a^b G(s) \varphi_i(s) ds = \int_{t_{i-1}}^{t_i} G(s) ds, \quad i = 2, \dots, n.$$

Seega süsteem (14.6) lihtsustub kujule

$$c_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}c_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (14.11)$$

kus $f_i = f(t_i)$ ja kordajad a_{ij} on leitavad seostega

$$a_{i1} = 0, \quad a_{ij} = \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_i, s) ds, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 2, \dots, n. \quad (14.12)$$

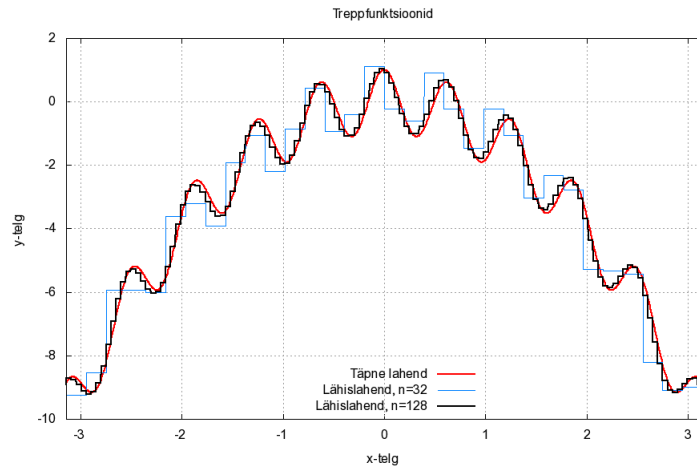
Sellise lihtsustuse üheks eeliseks on, et üle terve lõigu $[a, b]$ integreerimise asemel tuleb teha integreerimisi üle väikese lõigu, mis kvadratuursummasi kasutades annab palju vabamad tingimused kvadratuurvalemi sõlmede arvu kasutamiseks. Teiseks lihtsustuseks on integraali all oleva avaldise lihtsustumine. Volterra võrrandi korral saame lisaks veel süsteemi $(I - A)C = F$ maatriksi A diagonaalkujul (splainide omapära tõttu oleks ülal pool diagonaali a_{ij} võrdsed nullidega).

Treppfunktsioonide kasutamisel tuleb küll kahjuks lähislahend katkev ja samuti meetodi koondumine on aeglane.

Näide 14.1. Vaatleme Fredholmi integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t + s) u(s) ds + \cos(10t) - t^2 - 4\pi \sin(t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Kasutame lahendamiseks kollokatsioonimeetodit koos ülal defineeritud treppfunktsioonidega. Joonisel on võrdlus täpse lahendiga $u(t) = \cos(10t) - t^2$.



◇

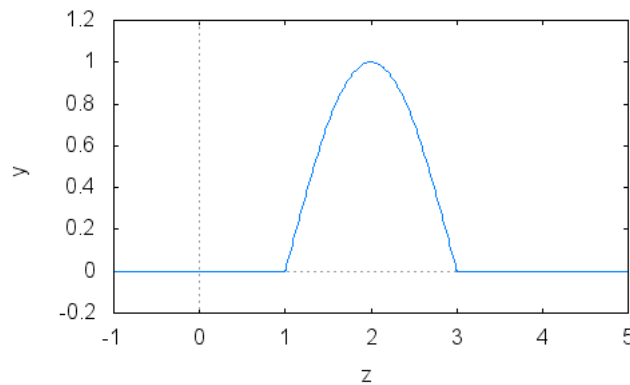
14.3 Näide halvasti käituvatest funktsioonidest

Valime $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ rolli pidevad (kuid kahjuks mitte siledad) kuppelfunktsioonid

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right)\right) & , t \in [t_1, t_2] \\ 0 & , t \notin [t_1, t_2] \end{cases}, \quad \varphi_n(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{t_n-t}{t_n-t_{n-1}}\right)\right) & , t \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0 & , t \notin [t_{n-1}, t_n] \end{cases},$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(2\frac{t-t_{i-1}}{t_{i+1}-t_{i-1}} - 1\right)\right) & , t \in [t_{i-1}, t_{i+1}] \\ 0 & , t \notin [t_{i-1}, t_{i+1}] \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

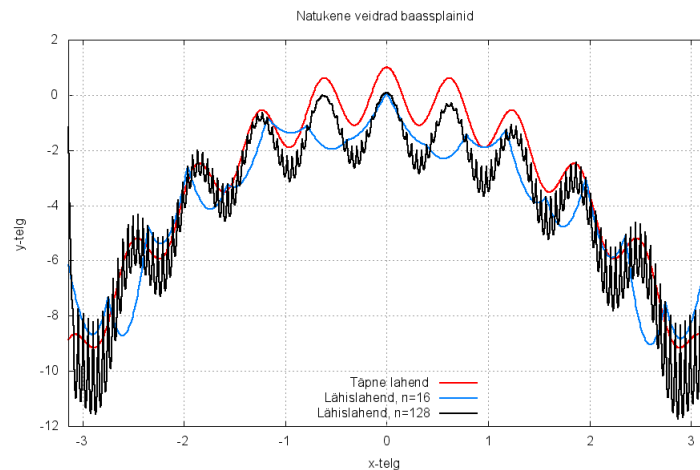
(14.13)



Näide 14.2. Vaatleme Fredholmi integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s) u(s) ds + \cos(10t) - t^2 - 4\pi \sin(t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Kasutame lahendamiseks kollokatsioonimeetodit koos ülal defineeritud kuppelfunktsioonidega. Joonisel on võrdlus täpse lahendiga $u(t) = \cos(10t) - t^2$.



Kuigi joonise kuju on sarnane, siis võib öelda, et vaadeldavad funktsioonid lähendavad täpset lahendit halvasti. Märkime, et kahe järjestikulise kuppelfunktsiooni summa annab y -teljel suurema väärtuse kui 1.

◇

14.4 Splaini mõiste

Jaotame lõigu $[a, b]$ väiksemateks osalõikudeks sõlmpunktidega t_1, t_2, \dots, t_n ning igal osalõigul $[t_{i-1}, t_i] \in [a, b]$ ($i = 2, \dots, n$) lähendame funktsiooni $y(t)$ erineva polünoomiga. Selliselt saame teatava tükiti polünoomiaalse funktsiooni, mida nimetatakse võrguga

$$\Delta_n = \{ t_1, t_2, \dots, t_n : a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b \} \quad (14.14)$$

seotud splainiks ja mis üldiselt võib võrgu Δ_n sisesõlmedes t_2, \dots, t_{n-1} olla katkev. Järgnevas nimetame splainiks siiski vaid sellist tükiti polünoomiaalset funktsiooni, mis on pidev ka võrgu Δ_n sõlmedes t_2, \dots, t_{n-1} .

Definitsioon 14.1. Võrgule Δ_n vastavaks m järku ($m \geq 1$) splainiks nimetatakse funktsiooni s_m , mis rahuldab järgmisi tingimusi:

1. funktsioon s_m on igal osalõigul $[t_{i-1}, t_i]$ ($i = 2, \dots, n$) ülimalt m -astme polünoom, s.t.

$$s_m(t) = c_{i,0} + c_{i,1}t + \dots + c_{i,m}t^m, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \dots, n; \quad (14.15)$$

2. funktsioon s_m on $m - 1$ korda pidevalt diferentseeruv kogu lõigul $[a, b]$, s.t. $s_m \in C^m[a, b]$.

Edaspidi nimetame võrgu Δ_n punkte t_1, \dots, t_n splaini s_m sõlmedeks ning toome sisse definitsiooni nõudeid rahuldavate splainide hulga $S_m(\Delta_n)$. Osutub, et $S_m(\Delta_n)$ on lõplikumõõtmeline vektorruum, mille dimensiooniks on $m + n - 1$:

$$\dim(S_m(\Delta_n)) = m + n - 1.$$

Tõepoolest, kõigepealt paneme tähele, et kui $s_{m,1}$ ja $s_{m,2}$ on kaks suvalist splaini hulgast $S_m(\Delta_n)$ ning α ja β mingid arvud, siis ka $s_m = \alpha s_{m,1} + \beta s_{m,2}$ on võrgule Δ_n vastav m -järku splain: $s_m \in S_m(\Delta_n)$. Edasi, igal lõigul $[t_{i-1}, t_i] \in [a, b]$ ($i = 2, \dots, n$)

on spline $s_m \in S_m(\Delta_n)$ kui m -astme polünoom määratud $m + 1$ parameetriga (polünoomi (14.15) kordajatega $c_{i,0}, \dots, c_{i,m}$ ning seetõttu on spline s_m konstrueerimiseks vajalike parameetrite üldarv $(n - 1)(m + 1)$. Tingimus $s_m \in C^{m-1}[a, b]$ aga seab igas sõlmes t_2, \dots, t_{n-1} splineile m lisatingimust (millist?), seega kokku $m(n - 2)$ tingimust, mis kitsendavad parameetrite valikut. Niisiis, võrgule Δ_n vastav m -järku spline $s_m \in S_m(\Delta_n)$ sisaldab üldiselt

$$(n - 1)(m + 1) - m(n - 2) = m + n - 1$$

vaba parameetrit, mis ongi aluseks meie väitele $\dim(S_m(\Delta_n)) = m + n - 1$.

Splaine $s_m \in S_m(\Delta_n)$ parameetrite määramiseks seatakse tingimused, et spline s_m lähendaks antud funktsiooni y . Paaritu m korral kasutatakse spline s_m määramisel sageli interpolatsioonitingimusi kujul

$$s_m(t_i) = y(t_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (14.16)$$

kus t_1, \dots, t_n on splinei sõlmed (me eeldame, et funktsioon y on määratud punktides t_1, \dots, t_n). Paaris m korral valitakse interpolatsioonisõlmedeks tavaliselt splinei sõlmede t_1, \dots, t_n vahel paiknevad punktid $z_{i-1} \in (t_{i-1}, t_i)$ ($i = 2, \dots, n$) ning nõutakse, et

$$s_m(z_i) = y(z_i), \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad (14.17)$$

me eeldame, et funktsioon y on määratud punktides z_1, \dots, z_{n-1} .

Definitsioon 14.2. Interpolatsioonitingimusi rahuldavaid splaine nimetatakse interpoleerivateks splineideks.

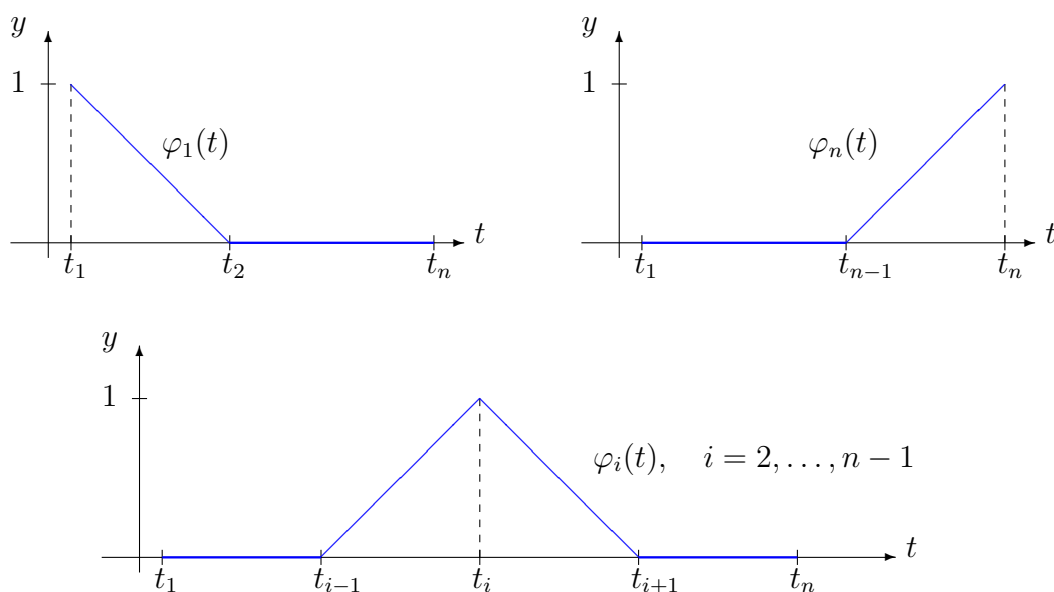
Paneme tähele, et interpoleeriv spline $s_1 \in S_1(\Delta_n)$ on tingimustega (14.16) üheselt määratud (miks?). Kui $m > 1$, siis tuleb interpoleeriva splinei $s_m \in S_m(\Delta_n)$ üheseks määramiseks lisada veel täiendavaid tingimusi (sageli on vastavad lisatingimused seotud lõigu $[a, b]$ otspunktidega või nendele lähedaste punktidega). Arvutuspraktikas kasutatakse kõige enam interpoleerivaid lineaarsplaine ($m = 1$), ruutsplaine ($m = 2$) ja kuupsplaine ($m = 3$).

14.5 Lineaarsed baassplained

Võtame funktsioonide $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ rolli pidevad lineaarsed baassplained

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t-t_1}{t_2-t_1} & , t \in [t_1, t_2] \\ 0 & , t \notin [t_1, t_2] \end{cases}, \quad \varphi_n(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{n-1}}{t_n-t_{n-1}} & , t \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0 & , t \notin [t_{n-1}, t_n] \end{cases},$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{i-1}}{t_i-t_{i-1}} & , t \in [t_{i-1}, t_i] \\ 1 - \frac{t-t_i}{t_{i+1}-t_i} & , t \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & , t \notin [t_{i-1}, t_{i+1}] \end{cases}, \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (14.18)$$



Funktsioonid $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ on nullist erinevad ainult nendele vastavates osalõikudes. Samuti kehtib omadus

$$\varphi_i(t_j) = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}.$$

Kuna $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in S_1(\Delta_n)$ on lineaarselt sõltumatud lõigul $[a, b]$, siis nad moodustavad baasi ruumis $S_1(\Delta_n)$ ning seega võime suvalise splaini $s_1 \in S_1(\Delta_n)$ esitada kujul

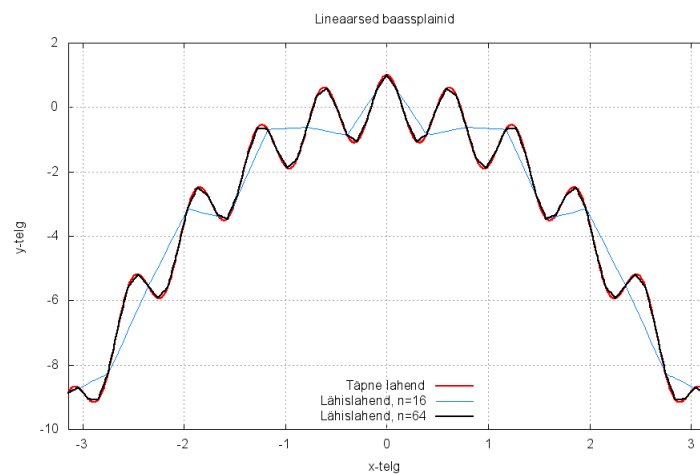
$$s_1(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t), \quad t \in [a, b], \quad (14.19)$$

kus c_1, \dots, c_n on mingid konstandid.

Näide 14.3. Vaatleme Fredholmi integraalvõrrandit

$$u(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(t+s) u(s) ds + \cos(10t) - t^2 - 4\pi \sin(t), \quad t \in [-\pi, \pi].$$

Kasutame lahendamiseks kollokatsioonimeetodit koos ülal defineeritud lineaarsete baassplainidega. Joonisel on võrdlus täpse lahendiga $u(t) = \cos(10t) - t^2$.



◇

Viited

- [1] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.