Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

15 Kollokatsioonimeetodil saadud lähislahendi hinnangud

Sisukord

15.1 Interpoleeriva lineaarsplaini hinnangud

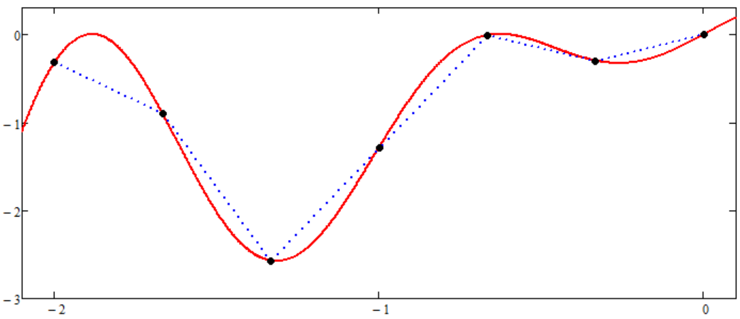
Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, mis on pidev lõigul $[a, b]$. Olgu meil antud võrk $\Delta_n \subset [a, b]$ sõlmedega $t_1, \ldots, t_n$. Üsna lihtne on vahetult kontrollida, et interpolatsioonitingimusi

$$s_m(t_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{15.1}$$

rahuldava lineaarsplaini $s_1 \in S_1(\Delta_n)$ võime igal osalõigul $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 2, \ldots, n)$ esitada kujul

$$s_1(t) = f(t_{i-1})\frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} + f(t_i)\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \ldots, n. \tag{15.2}$$

Sellise splaini graafikuks on murdjoon, mis ühendab punkte $(t_1, f(t_1)), \ldots, (t_n, f(t_n))$.



Kui $f \in C[a,b]$, siis saame defineerida funktsiooni f pidevuse mooduli

$$\omega(f,\delta) = \max_{\substack{t,t+h\in[a,b],\\ |h|\le\delta}} |f(t+h) - f(t)|, \tag{15.3}$$

kus $0 \le \delta \le b-a$.

Kuna lõigul $[a,b]$ pidev funktsioon f on seal ühtlaselt pidev, siis

$$\omega(f,\delta) \to 0, \quad \text{kui } \delta \to 0.$$

Teoreem 15.1. *Olgu $f \in C[a,b]$ ja olgu $s_1 \in S_1(\Delta_n)$ tingimusi* (15.1) *rahuldav lineaarsplain. Siis*

$$\max_{t\in[a,b]} |s_1(t)| = \max_{i=1,\dots,n} |s_1(t_i)| = \max_{i=1,\dots,n} |f(t_i)|, \tag{15.4}$$

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - s_1(t)| \le 2\omega(f,h_n), \tag{15.5}$$

kus

$$h_n = \max_{i=2,\dots,n} (t_i - t_{i-1}). \tag{15.6}$$

Kui $f \in C^1[a,b]$, siis

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - s_1(t)| \le \frac{1}{2} \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| h_n. \tag{15.7}$$

Kui $f \in C^2[a,b]$, siis

$$\max_{t\in[a,b]} |f(t) - s_1(t)| \le \frac{1}{8} \max_{t\in[a,b]} |f''(t)| h_n^2. \tag{15.8}$$

Tõestus. Tõestus. Väide (15.4) on ilmne. Hinnang (15.5) on järeldus esitusest (15.2). Kui $f \in C^1[a,b]$, siis kasutades valemit (15.2), saame iga $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 2,\dots,n)$ korral kirjutada

$$f(t) - s_1(t) = (f(t) - f(t_{i-1}))\frac{t_i - t}{t_i - t_{i-1}} + (f(t) - f(t_i))\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}. \tag{15.9}$$

Kasutades Lagrange'i keskväärtusteoreemi

$$f(\alpha) - f(\beta) = f'(\xi)(\alpha - \beta), \quad \xi \in (\alpha,\beta),$$

saame

$$f(t) - s_1(t) = f'(\xi)\frac{(t - t_{i-1})(t_i - t)}{t_i - t_{i-1}} - f'(\eta)\frac{(t_i - t)(t - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}, \tag{15.10}$$

kus $\xi \in (t_{i-1}, t)$, $\eta \in (t, t_i)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = 2, \ldots, n)$. Siit saame iga $i = 2, \ldots, n$ korral hinnata

$$\max_{t\in[t_{i-1},t_i]} |f(t) - s_1(t)| \le 2 \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| \max_{t\in[t_{i-1},t_i]} \frac{(t_i - t)(t - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \le \frac{1}{2} \max_{t\in[a,b]} |f'(t)| h_n, \tag{15.11}$$

millest järeldub hinnang (15.7). Märgime, et

$$\max_{t\in[t_{i-1},t_i]} |(t_i - t)(t - t_{i-1})| = \frac{(t_i - t_{i-1})^2}{4}.$$

Kui $f \in C^2[a, b]$, siis saame igal osalõigul $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 2, \ldots, n)$ lineaarse interpolatsiooni vea $f(t) - s_1(t)$ esitada kujul (vt. nt. [2]):

$$f(t) - s_1(t) = \frac{f''(\xi)}{2}(t - t_{i-1})(t - t_i), \quad \xi \in (t_{i-1}, t_i), \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \ldots, n. \tag{15.12}$$

Tuginedes valemile (15.12) on lihtne näidata, et kehtib võrratus (15.8). □

15.2 Domineeriva peadiagonaaliga maatriksid

Definitsioon 15.1. Maatriksit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nimetatakse domineeriva peadiagonaaliga maatriksiks, kui kehtib

$$|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| > 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15.13}$$

Teoreem 15.2. *Kui maatriks* (15.13) *on domineeriva peadiagonaaliga, siis ta on regulaarne, s.t.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{15.14}$$

Tõestus. Olgu maatriks A domineeriva peadiagonaaliga. Oletame vastuväiteliselt, et $\det A = 0$. Vaatleme lineaarset homogeenset võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{15.15}$$

mille kordajateks on maatriksi A elemendid ja otsitavateks on $x_1, \dots, x_n$. Kuna $\det A = 0$, siis süsteemil (15.15) on olemas mittetriviaalne lahend $x_1, \dots, x_n$, s.t. $x_1, \dots, x_n$ rahuldavad süsteemi (15.15) võrrandeid ja vähemalt üks nendest on nullist erinev. Olgu

$$|x_k| = \max_{j=1,\dots,n} |x_j|.$$

Siis $|x_k| \neq 0$. Teiselt poolt saab k. võrrandist avaldada

$$a_{kk} x_k = - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} a_{kj} x_j.$$

Seega

$$|a_{kk} x_k| = |a_{kk}||x_k| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|.$$

Kuna $x_k \neq 0$, siis

$$|a_{kk}| \leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|,$$

mis on vastuolus eeldusega (15.13). Vastuolu tekkis oletustest, et domineeriva peadiagonaaliga maatriks ei ole regulaarne. □

Teoreem 15.3. *Kui tuum $K \in C([a,b] \times [a,b])$ ja on täidetud tingimus*

$$\rho := \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\, ds < 1, \tag{15.16}$$

siis lineaarseid baassplaine $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t) \in S_1(\Delta_n)$ kasutatava kollokatsioonimeetodiga tekkiv lineaarvõrrandite süsteem

$$c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_j = f_i, \quad i = 1, \dots, n, \tag{15.17}$$

on domineeriva peadiagonaaliga.

Tõestus. Näitame, et

$$|1 - a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |-a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n. \tag{15.18}$$

Kuna kehtib võrratus (15.16) ning iga $t \in [a,b]$ korral kehtib

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(t) = 1,$$

siis

$$
\begin{aligned}
|1-a_{ii}| - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| &\geq 1 - \int_a^b |K(t_i,s)|\varphi_i(s)\,ds - \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \int_a^b |K(t_i,s)|\varphi_j(s)\,ds \\
&= 1 - \int_a^b |K(t_i,s)| \left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_j(s) \right) ds = 1 - \int_a^b |K(t_i,s)|\,ds \\
&\geq 1 - \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t_i,s)|\,ds = 1-\rho > 0, \quad i = 2,\ldots,n,
\end{aligned}
$$

mis ütlebki, et kehtib (15.18). □

15.3 Kollokatsioonimeetodil saadud lähislahendi hinnangud

Teoreem 15.4. *Eeldame, et $K \in C([a,b]\times[a,b])$ ja $f \in C[a,b]$ ning olgu täidetud tingimus* (15.16)*. Siis Fredholmi integraalvõrrandil*

$$
u(t) = \int_a^b K(t,s)u(s)\,ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{15.19}
$$

on parajasti üks lahend $u \in C[a,b]$ ning kollokatsioonitingimused

$$
u_n(t_i) - \int_a^b K(t_i,s)u_n(s)\,ds + f(t_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{15.20}
$$

määravad iga naturaalarvu n korral parajasti ühe lineaarvõrrandite süsteemi (15.17) *lahendi $c_1,\ldots,c_n$ ja seega ka splaini $u_n \in S_1(\Delta_n)$ kujul*

$$
u_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(t), \quad t \in [a,b]. \tag{15.21}
$$

Kui võrk Δ_n on selline, et $n\to\infty$ korral

$$
h_n = \max_{i=2,\ldots,n} (t_i - t_{i-1}) \to 0, \tag{15.22}
$$

siis

$$
\max_{t\in[a,b]} |u(t)-u_n(t)| \to 0, \quad \textit{kui } n\to\infty. \tag{15.23}
$$

Tõestus. Tõestus tugineb juba varem vaadeldud teoreemidele. Lahendi olemasolu ja ühesus on toodud eelmistes paragrahvides. □

Teoreem 15.5. *Olgu täidetud teoreemi 15.4 eeldused ja olgu võrrandi* (15.19) *lahendi u lähislahend u_n leitud kollokatsioonitingimustest* (15.20). *Kui $u \in C^1[a,b]$, siis kehtib hinnang*

$$\max_{t\in[a,b]} |u(t) - u_n(t)| \le c\, h_n, \tag{15.24}$$

kus c on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Kui $u \in C^2[a,b]$, siis kehtib hinnang

$$\max_{t\in[a,b]} |u(t) - u_n(t)| \le c'\, h_n^2, \tag{15.25}$$

kus c' on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest n.

Tõestus. Tõestus. Olgu $s_1 \in S_1(\Delta_n)$ võrrandi (15.19) lahendit u interpoleeriv splain:

$$s_1(t_i) = u(t_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{15.26}$$

Siis saame esialgsest võrrandist $s_1(x)$ liitmise ja lahutamise abil välja kirjutada

$$s_1(t_i) = \int_a^b K(t_i,x)s_1(x)\,dx + \int_a^b K(t_i,x)(u(x) - s_1(x))\,dx + f(t_i), \quad i = 1, \dots, n. \tag{15.27}$$

Tähistame

$$v(t) = s_1(t) - u_n(t), \quad t \in [a,b]. \tag{15.28}$$

Siis $v \in S_1(\Delta_n)$ ning võrduste (15.20) ja (15.27) abil saame

$$v(t_i) = \int_a^b K(t_i,x)v(x)\,dx + \int_a^b K(t_i,x)(u(x) - s_1(x))\,dx, \quad i = 1, \dots, n. \tag{15.29}$$

Eelduse (15.16) tõttu järeldub siit, et

$$\max_{i=1,\dots,n} |v(t_i)| \le \rho \max_{t\in[a,b]} |v(t)| + \rho \max_{t\in[a,b]} |u(t) - s_1(t)| \tag{15.30}$$

ehk

$$\max_{t\in[a,b]} |v(t)| \le \frac{\rho}{1-\rho} \max_{t\in[a,b]} |u(t) - s_1(t)|. \tag{15.31}$$

Kuna

$$\max_{t\in[a,b]} |u(t) - u_n(t)| \le \max_{t\in[a,b]} |u(t) - s_1(t)| + \max_{t\in[a,b]} |v(t)|, \tag{15.32}$$

siis tuginedes teoreemile 15.1 ning võrratustele (15.31) ja (15.32), saame

$$\max_{t\in[a,b]} |u(t) - u_n(t)| \le \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho}{1-\rho}\right) \max_{t\in[a,b]} |u'(t)|\right] h_n, \tag{15.33}$$

Teiste sõnadega, kehtib hinnang (15.24), kus

$$c = \frac{1}{2(1-\rho)} \max_{t \in [a,b]} |u'(t)|.$$

Analoogiliselt, kui $u \in C^2[a,b]$, siis jõuame teoreemi 15.1 ning võrratuste (15.31) ja (15.32) abil hinnanguni (15.25). $\square$

Märkus 15.1. *Kui võrrandil* (15.19) *on olemas lahend* $u \in C[a,b]$ *ning* $K \in C^k([a,b] \times [a,b])$ *ja* $f \in C^k[a,b]$, *kus* $k = 1$ *või* $k = 2$, *siis* $u \in C^k[a,b]$ *(miks?).*

Viited

[1] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.

[2] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1986.