

2 Hariliku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesande lahendi arendamine astmeritta

Sisukord

2 Hariliku diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesande lahendi arendamine astmeritta	13
2.1 Mõned põhimõisted	13
2.2 Lahendi arendamine astmeritta	14
2.3 Tayloriga meetod	18

2.1 Mõned põhimõisted

Toome esiteks paar mõistet (vt. [3]). Järgnev astmeridade abil lahendamise teooria baseerub teoreemil

Teoreem 2.1. *Kui funktsioon $f(x, y)$ on holomorfnel piirkonnas D , siis ka diferentsiaalvõrrandi $y' = f(x, y)$ lahendid on holomorfsed.*

Funktsiooni $f(x, y)$ holomorfsus ehk analüütilisus muutujate x, y piirkonnas D tähendab, et iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ korral on $f(x, y)$ arendatav astmeritta

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j, \tag{2.1}$$

mis koondub punkti (x_0, y_0) teatavas übruses.

Lahendi $y(x)$ holomorfsus ehk analüütilisus tähendab, et iga punkti x_0 korral selle määramispiirkonnast D on $y(x)$ arendatav astmeritta

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (x - x_0)^i, \tag{2.2}$$

mis koondub punkti x_0 teatavas übruses. Rea (2.2) kordajad avalduvad kujul

$$c_i = \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Märkus 2.1. *Holomorfned funktsioonid on lõpmata arv kordi diferentseeruvad. Vastupidine ei kehti, s.t. leidub lõpmata arv kordi diferentseeruvaid funktsioone, mis ei ole astmeritta arendatavad. Näiteks funktsioon*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0, \end{cases}$$

on lõpmata „sile“, aga ei ole astmeritta arendatav punktis $x = 0$.

Märgime, et $n + 1$ korda diferentseeruva funktsiooni $y(x)$ Taylori rida avaldub kujul

$$y(x) = \sum_{i=0}^n \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \in (x_0, x). \quad (2.4)$$

2.2 Lahendi arendamine astmeritta

Põhineb materjalidel [2] ja [3].

Cauchy ülesande

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

lahendit otsime astmerea (2.2) kujul:

$$y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (2.5)$$

ehk koos kordajatega (2.3):

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \quad (2.6)$$

Algtingimus $y(x_0) = y_0$ on rahuldatud, kui $c_0 = y_0$. Järgnevalt leiame võrrandist $y' = f(x, y)$, et

$$c_1 = y'(x_0) = f(x_0, y_0).$$

Diferentseerime võrrandit $y' = f(x, y)$,

$$y'' = f_x(x, y) + f_y(x, y) y'.$$

Siit leiame, et

$$c_2 = \frac{1}{2}y''(x_0) = \frac{1}{2}[f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)].$$

Sedasi võime võrrandit järjest diferentseerida ja pärast diferentseerimist leida konstandid c_i asendades leitud tuletised punktis (x_0, y_0) . Meetod kasutab ära infot lahendi y tuletise kohta, mis on algvõrrandis antud $y' = f(x, y)$.

Kuna igal sammul läheb kordajate c_i leidmine järjest töömahukamaks ja näiteks arvutite jaoks ebatäpseks, siis piirduetakse ainult mingi arv esimeste liikmetega. Viimane tähendab aga seda, et lahend $y(x)$ leitakse ligikaudu ja sealjuures tehakse mingi viga. Meie lähislahend esimese $n + 1$ liikme korral näeb välja järgmine:

$$y_n(x) := c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n, \quad (2.7)$$

kus konstandid c_0, c_1, \dots on leitud seostega

$$\begin{aligned} c_0 &= y_0, \\ c_1 &= f(x_0, y_0), \\ c_2 &= \frac{1}{2}[f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0)f(x_0, y_0)], \\ &\dots \end{aligned}$$

Sel juhul saame lähendi $y_n(x)$ kasutamisel vea suuruseks

$$y(x) - y_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i(x - x_0)^i, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]. \quad (2.8)$$

Viimases avaldises sõltub tehtav viga võrrandi $y' = f(x, y)$ parema poole $f(x, y)$ osatuletistest ja sellest, kui kaugel on argumenti x väärtus algpunktist x_0 .

Näide 2.1. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Funktsioon $f(x, y) = x^2 + y^2$ on lõpmata arv kordi diferentseeruv nii muutuja x kui muutuja y järgi, lisaks oma astmelise kuju järgi ka holomorfne. Siit

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, & y'(0) &= f(0, 0) = 0, \\ y'' &= 2x + 2yy', & y''(0) &= 0, \\ y''' &= 2 + 2(y')^2 + 2yy'', & y'''(0) &= 2, \\ y^{(4)} &= 6y'y'' + 2yy''', & y^{(4)}(0) &= 0, \\ y^{(5)} &= 6(y'')^2 + 8y'y''' + 2yy^{(4)}, & y^{(5)}(0) &= 0, \\ y^{(6)} &= 20y''y''' + 10y'y^{(4)} + 2yy^{(5)}, & y^{(6)}(0) &= 0, \\ y^{(7)} &= 20(y''')^2 + 30y''y^{(4)} + 12y'y^{(5)} + 2yy^{(6)}, & y^{(7)}(0) &= 80. \end{aligned}$$

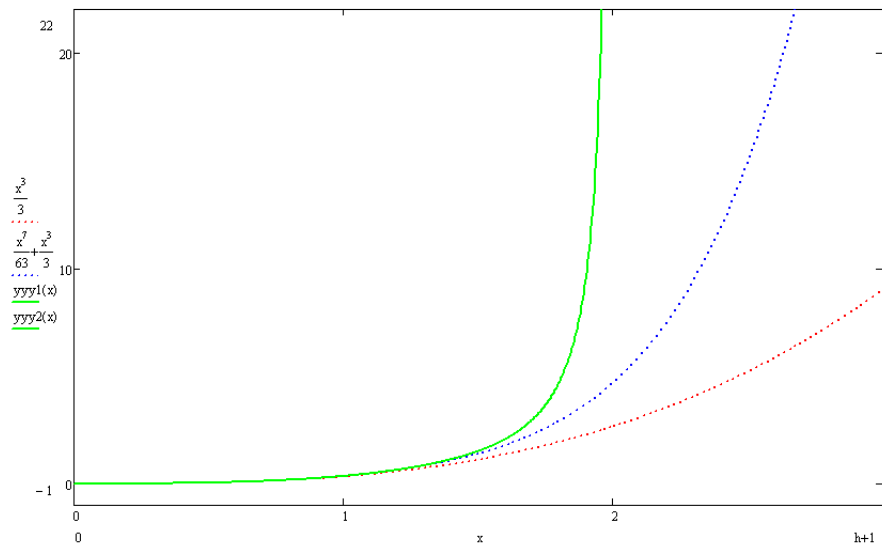
Siit võime võtta esimesed 8 liiget, kuni tuletise järguni 7:

$$y_7(x) = \frac{2}{3!}x^3 + \frac{80}{7!}x^7 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7.$$

Viimase viga on suurusjärku $O(|x|^7)$, s.t. leidub konstant $C > 0$, et piisavalt väikeste x väärtuste korral kehtib võrratus

$$|y(x) - y_7(x)| \leq C|x|^7. \quad (2.9)$$

Toome graafiku täpse lahendi (leitud programmiga Mathcad) ja lähislahendite $y_3(x) = \frac{1}{3}x^3$ ja $y_7(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7$ vahel.



Näeme, et täpne lahend ja lähislahendid on küllalt lähedased, kui asume punktile x_0 piisavalt lähedal. Mida kaugemale läheme punktist x_0 , seda ebatäpsemaks muutuvad lähislahendid. See on tingitud sellest, et astmerida koondub ainult teatavas lähiümbruses. Teiseks põhjuseks on muidugi see, et lõpmatu rea asemel kasutame väga vähestest liikmetest koosnevat rida. \diamond

Näide 2.2. Uurime võrdluseks iteratsioonimeetodi juures vaadeldud Cauchy ülesannet:

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$$

Igaüks võib ise kontrollida, et me saame järgmised lähendid:

astmerida	iteratsioonimeetod
$y_0(x) = 1$	$y_0(x) = 1$
$y_1(x) = 1 - x$	$y_1(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$
$y_2(x) = 1 - x + x^2$	$y_2(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{6}$
$y_3(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3}$	$y_3(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{24}$
$y_4(x) = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}$	

Tulemus on üsna sarnane. Sama indeksiga lahendite järgud on erinevad, kuna tuletis alandab polünoomi astet, integreerimine aga tõstab. Astmeritta arendamisel on iteratsioonimeetodi ees see eelis, et kui funktsioon on diferentseeruv, siis on tuletist alati võimalik leida, kuid integreeruva funktsiooni korral ei ole algfunktsioon analüütilisel kujul garanteeritud (s.t. integraal elementaarfunktsioonist ei pruugi sugugi olla enam elementaarfunktsioon). Integreerimine on üldse palju keerulisem operatsioon, kui tuletise leidmine mingis punktis. \diamond

Näide 2.3. Astmeritta arendamist saab kasutada ka kõrgemat järku võrrandite jaoks, näiteks

$$y'' = -9y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$$

Funktsioon $f(x, y) = -9y$ on lõpmata arv kordi diferentseeruv nii muutuja x kui muutuja y järgi. Näeme, et f on ka holomorfne. Me otsime oma lahendit ikkagi kujul (2.5):

$$y(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$$

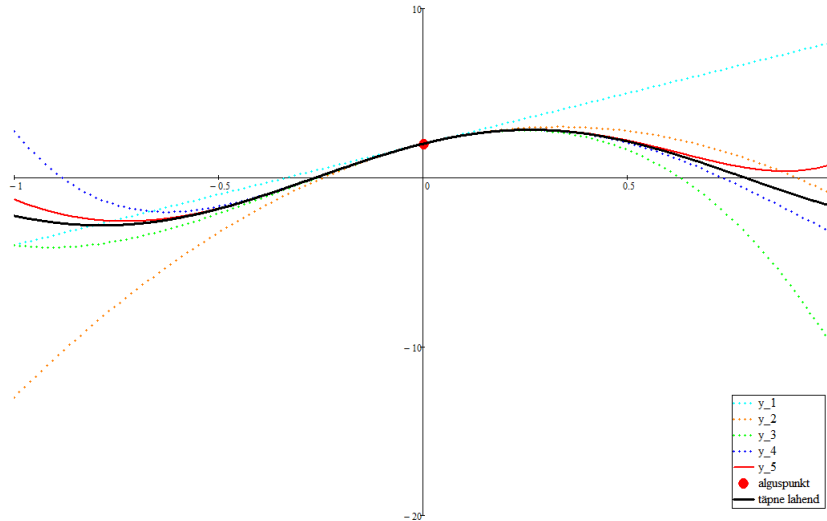
Siit

$$\begin{aligned} c_0 &= y(0) = 2, \\ c_1 &= y'(0) = 6, \\ c_2 &= \frac{1}{2!}y''(0) = -\frac{9}{2}y(0) = -\frac{9}{2} \cdot 2 = -9, \\ c_3 &= \frac{1}{3!}y'''(0) = -\frac{9}{6}y'(0) = -\frac{9}{6} \cdot 6 = -9, \\ c_4 &= \frac{1}{4!}y^{(4)}(0) = -\frac{9}{24}y''(0) = -\frac{9}{24}(-18) = \frac{27}{4}, \\ c_5 &= \frac{1}{5!}y^{(5)}(0) = -\frac{9}{120}y'''(0) = -\frac{9}{120}(-54) = \frac{81}{20}. \end{aligned}$$

Piisab näiteks võtta esimesed 6 liiget, kuni tuletise järguni 5:

$$y_5(x) = 2 + 6x - 9x^2 - 9x^3 + \frac{27}{4}x^4 + \frac{81}{20}x^5.$$

Ülesande täpne lahend on $y(x) = 2 \cos(3x) + 2 \sin(3x)$. Toome võrdluseks graafiku täpse lahendi ja erinevat järku lähilahendite y_n vahel.



◇

2.3 Taylori meetod

Nagu iteratsioonimeetodi korral, nii ka lahendi ritta arendamine on sobiv meetod lahendi y väärtuste leidmiseks punktides, mis paiknevad küllalt lähedal algpunktile x_0 . Kui meid huvitavad lahendi väärtused x_0 -st suhteliselt kaugel paiknevates punktides, siis enamasti on mõistlikum kasutada lahendi jätkamist. Kui me kasutame lahendi jätkamist ainult teatud sõlmedes, siis viimast nimetatakse ka Taylori meetodiks.

Moodustame piisavalt väikese sammupikkuse h korral sõlmed

$$x_i = a + i h, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Tähistame lahendi y ligikaudseid väärtusi sõlmedes y_0, y_1, y_2, \dots . Arendades lahendi y ritta igas sõlmes x_i ja jättes ära jääkliikme, saab siit tuletada n -järku Taylori meetodi,

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} f'(x_i, y_i) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n-1)}(x_i, y_i)} \quad (2.11)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots$$

Algülesandes $y' = f(x, y)$ on y esimese tuletise avaldis juba antud. Edasi saab samm-sammult leida $y''(x_i) = f'(x_i, y_i)$, $y'''(x_i) = f''(x_i, y_i)$ jne.

Siinjuures ei tohi ära unustada, et funktsiooni f tuletised tähendavad siin täistuletist, s.t. näiteks

$$f'(x, y) = f_x(x, y) + f_y(x, y) y'(x) = f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y). \quad (2.12)$$

Näide 2.4. Vaatleme ees pool toodud Cauchy ülesannet

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$$

Punkti $x = 0$ ümbruses saime lähislahenditeks

$$y_3(x) = \frac{1}{3}x^3, \quad y_7(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7.$$

Näiteks leiame punktis $x = 1$ väärtuse leitud lähislahendi abil

$$y(1) \approx y_3(1) = \frac{1}{3}(1)^3 = \frac{1}{3}.$$

Seejärel arendame lahendi y astmeritta punktis $x = 1$, kasutades uut algtingimust

$$y(1) = \frac{1}{3}.$$

Kasutades eelnevalt leitud y tuletiste avaldisi saame

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2, & y'(1) &= 1^2 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}, \\ y'' &= 2x + 2y y', & y''(1) &= 2 + \frac{2}{3} \times \frac{10}{9} = \frac{74}{27}, \\ y''' &= 2 + 2(y')^2 + 2y y'', & y'''(1) &= \frac{170}{27}. \end{aligned}$$

Seega võime näiteks võtta lähislahendiks funktsiooni

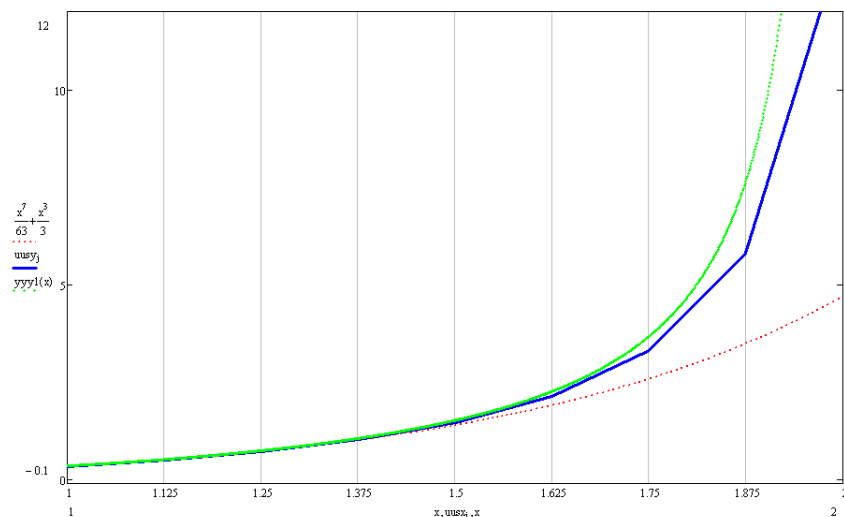
$$y(x) \approx \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 & , x \in [0, 1), \\ \frac{1}{3} + \frac{10}{9}(x-1) + \frac{37}{27}(x-1)^2 + \frac{85}{81}(x-1)^3 & , x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Sedasi saame vajaduse korral jätkata.

Toome veel lõpetuseks joonise (lõigul $[1, 2]$), kus rohelisega on täpne lahend, punasega punktis $x = 0$ lahendi y ritta arendatud lähislahend $y_7(x)$ ja sinisega Tayloriga meetodiga leitud lähislahend (samm $h = \frac{1}{16}$ ehk 16 osalõiku ja igas sellises sõlmes on lahendit jätkatud tema ritta arendamise teel, kasutades ainult teist järku Tayloriga arendist

$$y_2(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2.$$

On üsna ilmne, et lahendi jätkamine annab alguspunktist eemaldumisel parema tulemuse.



◇

Märkus 2.2. Nagu näidetest näha võis, peab Tayloriga meetodi korral tegema lisatööd funktsiooni $f(x, y)$ osatuletiste leidmisel. Sellist tuletiste leidmist on aga juba suhteliselt raske universaalselt programmeerida ja isegi kui see on võimalik, siis vähegi keerulisema funktsiooni f korral muutub algoritmi töö märkimisväärselt aeglaseks. Viimane on põhjuseks, miks praktikas Tayloriga meetodit eriti ei kasutata. Tegelikult on välja töötatud palju efektiivsemaid meetodeid, mis kasutavad ainult funktsiooni $f(x, y)$ väärtuste arvutamist.

Küll aga on Tayloriga meetod või siis ka lahendi astmeritta arendamine oma koha leidnud teoreetilist laadi uuringutes või siis teatavatel erijuhtudel (näiteks konkreetse ülesande korral, kus tuletised annab teoreetiliselt ära leida).

Viited

- [1] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.
- [2] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.
- [3] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu Ülikooli Kirjastus 2011.