

## 3 Euleri meetod. Täiustatud Euleri meetod

### Sisukord

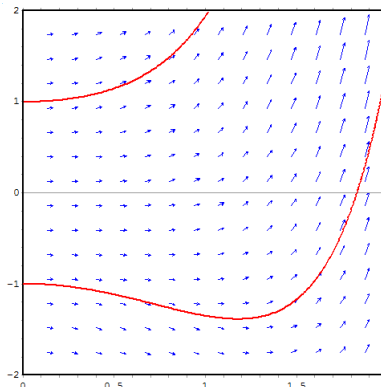
<b>3 Euleri meetod. Täiustatud Euleri meetod</b>	<b>21</b>
3.1 Euleri meetod . . . . .	21
3.2 Täiustatud Euleri meetod . . . . .	25
3.3 Integraali ligikaudne arvutamine Euleri meetodiga . . . . .	26
3.4 I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemid . . . . .	30
3.5 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid . . . . .	32

### 3.1 Euleri meetod

Alustame näitega. Vaatame järgmist algtingimusega ülesannet:

$$y' = xy + x^3, \quad y(0) = y_0, \quad x \in [0, 2]. \quad (3.1)$$

Diferentsiaalvõrrandit võib endale ette kujutada ka kui vektorvälja, kus igas punktis  $(x, y)$  on joonestatud vektor tõusunurga tangensiga  $y' = f(x, y)$ . Järgmisel joonisel ongi joonestatud ülesandele (3.1) vastav vektorväli (tõsi, veidi „hõreda“ võitu) koos kahe erineva lahendiga.



Algtingimusele  $y(0) = 1$  vastab ülemine joon, mis läbib „alguspunkti“  $(0, 1)$ . Teisele algtingimusele  $y(0) = -1$  vastab alumine joon, mis läbib „alguspunkti“  $(0, -1)$ .

Siit tekib ka idee: lahendada võrrandit  $y' = f(x, y)$  nii, et alustame alguspunktist  $(x_0, y_0)$  ja liigume kogu aeg edasi mööda vektoreid. Vektori tõusunurga arvutamisega ei ole mingeid probleeme, kuna tõusunurga tangens võrdub funktsiooni  $y$  tuletisega antud punktis, viimane on aga antud, s.t. me saame kasutada seda sama arvutuseeskirja  $y' = f(x, y)$ .

Sel juhul lahendi täpsus sõltub sellest, kui väikeste lõikude kaupa (ehk ka kui lühikeste või pikkade vektorite kaupa) me edasi liigume. Peab arvestama, et kui me valime liiga suured sammud, siis me võime „maha magada“ lahendi kiire muutumise (kuna me liigume mööda vektorit, samal ajal kui kui kuskil poole tee peal oleksime pidanud peatuma ja arvutama uue järsema tõusunurga ning liikuma edasi juba uue vektori suunal). Teisalt, valides liiga väikesed sammud, peame tegema üleliia palju arvutusi ja viimane ei pruugi arvutusaega silmas pidades olla just kõige mõistlikum teguviis. Pealegi on arvutustäpsus arvutites piiratud ja liialt väikseid samme ei saagi valida. Selline võrrandi lahendamise idee on kirja pandav Euleri meetodiga, mille üldise algoritmi sõnastame natukese aja pärast.

**Näide 3.1.** Vaatame esiteks, kuidas Euleri meetodit rakendada konkreetse ülesande peal, näiteks

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2].$$

Märgime, et ülesande täpne lahend on

$$y(x) = e^{-x} \int x e^x dx = 2e^{-x} + x - 1.$$

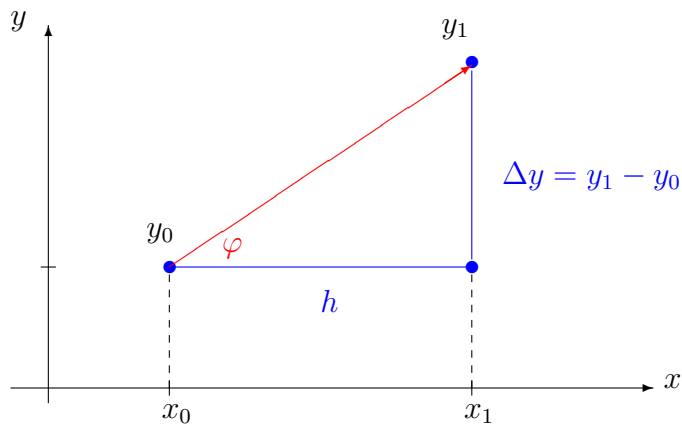
Viimast kasutame illustreerimaks Euleri meetodi käitumist täpse lahendi suhtes.

Jagame lõigu  $[0, 2]$  neljaks võrdseks osaks. Sel juhul sammupikkus  $h = 1/2$  ja me saame sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

Kui punktis  $x_0$  on lahendi väärtus  $y_0$ , siis liikudes mööda vektorit, satume punkti  $(x_1, y_1)$ . Sel juhul vektori tõusunurga tangens on arvutatav kui

$$\tan(\varphi) = \frac{\Delta y}{h}.$$



Arvestades funktsiooni diferentsiaali mõistet, saame

$$\tan(\varphi) = \frac{dy(x_0)}{dx} = y'(x_0).$$

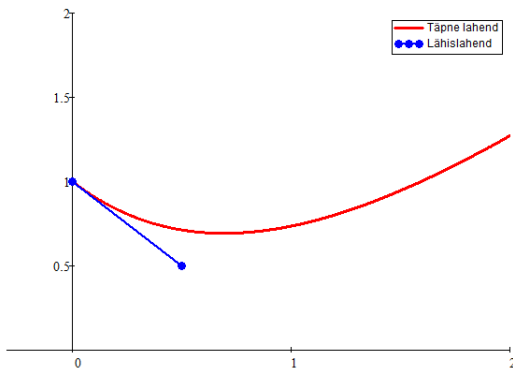
Siit võime kirjutada

$$\Delta y = h y'(x_0) = h f(x_0, y_0),$$

ja seega liikudes mööda vektorit jõuame punkti  $(x_1, y_1)$ , kus

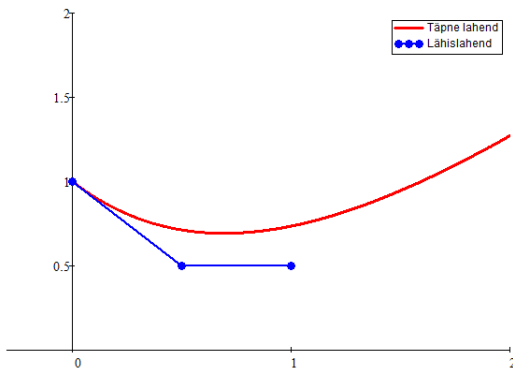
$$y_1 = y_0 + \Delta y = y_0 + h f(x_0, y_0).$$

Sedasi jätkame, kuni jõuame punkti  $(x_4, y_4)$ .



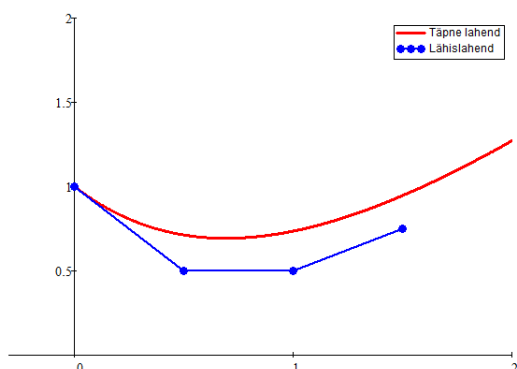
$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}$$



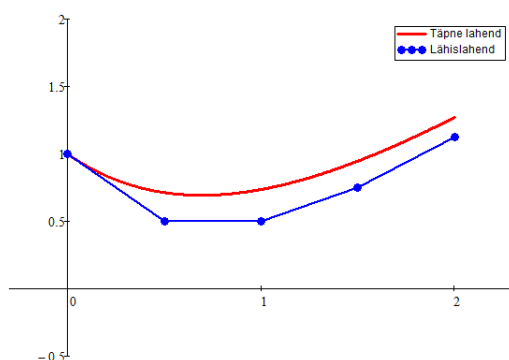
$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

$$y_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$



$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)$$

$$y_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) = \frac{9}{8}$$

Saadud murdjoont, mis ühendab punkte  $(0, 1)$ ,  $(0.5, 1/2)$ ,  $(1, 1/2)$ ,  $(1.5, 3/4)$  ja  $(2, 9/8)$ , nimetatakse ka Euleri murdjooneks. Täpsema lahendi saamiseks peaksime võtma rohkem sõlmi ja seega tegema ka rohkem arvutusi.  $\diamond$

Üldjuhul võime Euleri meetodit rakendada järgmiselt (vt. [2, 3, 4, 5]). Esiteks valime sammupikkuse  $h$  ja seejärel moodustame sõlmed

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Igale sõlmele vastab lähislahend  $y_i$ , mille arvutame eeskirjaga

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

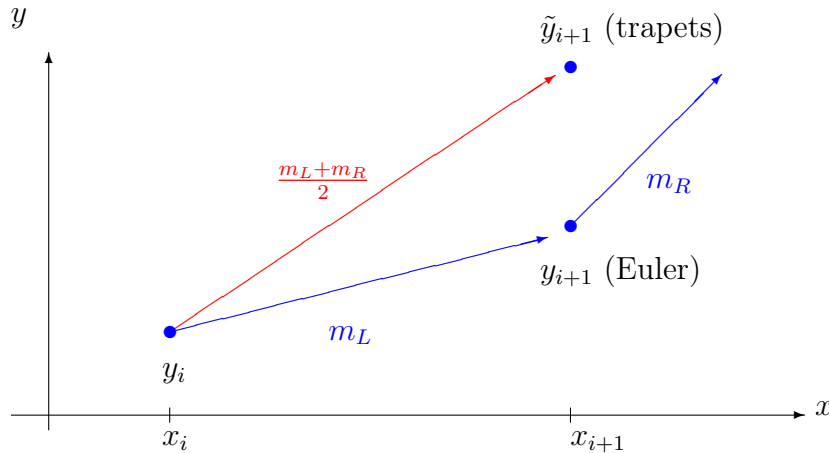
Šveitsi matemaatik Leonhard Euler (1707 - 1783) kasutas seda valemit juba 1768. aastal.

Euleri meetod sobib oma lihtsuse tõttu hästi õppematerjaliks, teda on kerge programmeerida ja lihtsamal juhul teeb ta oma töö väga ilusasti ära. Samuti on Euleri meetodi abil lihtne uurida vigade ülekandumist ligikaudsetes arvutustes ja veel teistes sarnastes kõrvalefektides. Euleri meetod ei sobi aga näiteks võrrandite jaoks, mille lahendid on kiirelt võnkuvad või omavad väga järske muutusi või millele väärtused muutuvad väga „pikal“ skaalal.

### 3.2 Täiustatud Euleri meetod

Väikesed “parandused” Euleri meetodis lubavad tuletada trapetsmeetodi (vt. [2, 4, 5])

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left[ f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i)) \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$



Vaadates diferentsiaalvõrrandit  $y' = f(x, y)$  kui vektorvälja, liigub Euleri meetod mööda vektoreid, mille tõus sõlmes  $x_i$  on  $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ . Tähistame selle tähisega  $m_L = f(x_i, y_i)$ . Analoogiliselt annaks Euleri meetod järgmises sõlmes  $x_{i+1}$  tõusu  $m_R = f(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Et arvutada väärtust  $y_{i+1}$ , kasutame samuti Euleri meetodiga leitud lähendit (prognoositavat tulemust või siis ka ennustust)  $y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$ . Siit saame, et  $m_R = f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i))$ .

Trapetsmeetod kasutab vektori tõusuks kahe Euleri meetodiga leitud väärtuse aritmeetilist keskmist  $\frac{m_L + m_R}{2}$ . Punktis  $x_i$  on seega diferentsiaal  $dy$  muuduga  $h$  leitav valemiga  $\frac{h}{2}(m_L + m_R)$ . Märgive, et meetodi nimi on tulnud ühemuutuva funktsiooni  $y'(x) = f(x)$  integreerimisest

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = y(x_{i+1}) - y(x_i),$$

kus vasakule poolde on rakendatud trapetsvalemit

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

Pannes need kaks tulemust kokku, saame

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + \frac{h}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1})).$$

**Märkus 3.1.** *Trapetsmeetod (3.4) kannab ka täiustatud Euleri meetodi nime.*

Hiljem me näeme, et täiustatud Euleri meetod on teist järku meetod, s.t. tema sammul tekkiv viga on järku  $O(h^3)$ , s.t.

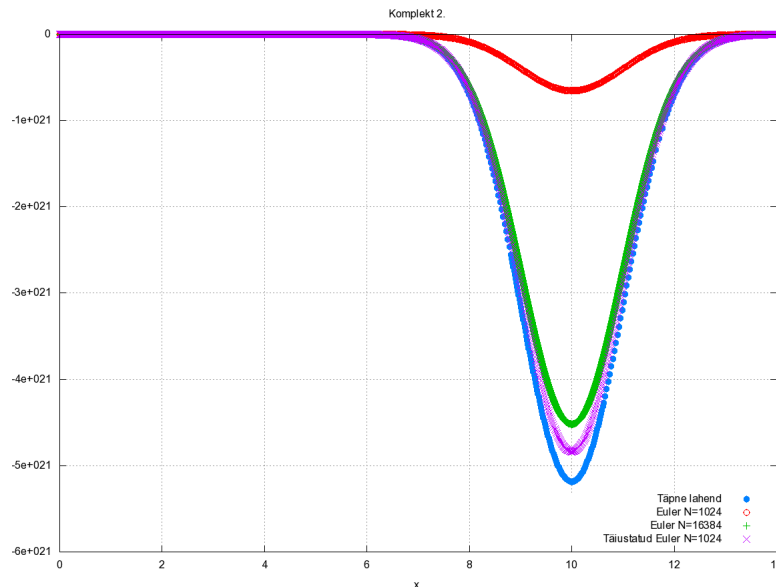
$$|y(x_1) - y_1| \leq \Theta h^3, \quad (3.5)$$

kus  $\Theta > 0$  on mingi konstant.

**Näide 3.2.** Toome ära graafiku Cauchy ülesande

$$y' = -(x - 10)y, \quad y(0) = -1, \quad x \in [0, 14],$$

kohta. Sel korral lahend käitub siledalt, kuid see-eest äärmiselt suures vahemikus.



Täiustatud Euleri meetod suudab sama arvu sõlmede korral ( $N = 1024$ ) saavutada oluliselt parema tulemuse, samal ajal kui Euleri meetod  $N = 16384$  korral jääb ikkagi natukene “lahjaks” relvaks.  $\diamond$

### 3.3 Integraali ligikaudne arvutamine Euleri meetodiga

Olgu meil meil antud integraal

$$\int_a^b f(s) ds. \quad (3.6)$$

Matemaatilise analüüsi kursusest teame, et kui  $f$  on pidev funktsioon integreerimislõigul  $[a, b]$ , siis ta on integreeruv sel lõigul. Siis leidub algfunktsioon  $F$  selliselt, et  $F'(x) = f(x)$  iga argumendi  $x \in [a, b]$  korral.

Kasutades ära Newton-Leibnizi integraali ülemise raja funktsioonina, kirjutame

$$F(x) = \int_a^x f(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

Siit tekib Cauchy ülesanne

$$y' = f(x), \quad y(a) = 0, \tag{3.7}$$

kus tundmatu funktsioon  $y$  tähistab algfunktsiooni  $F$ . Lahendi  $y$  leidmisel saame arvutada integraali

$$y(b) = F(b) = \int_a^b f(s) ds.$$

**Näide 3.3.** Olgu meil vaja leida integraal

$$I = \int_{-1}^1 s ds.$$

Antud juhul on väga lihtne näha, et integraal  $I$  võrdub nulliga, kuna tegemist on sümmetriliste rajadega ja integraalimärgi all on paaritu funktsioon (s.t.  $f(x) = -f(-x)$ ).

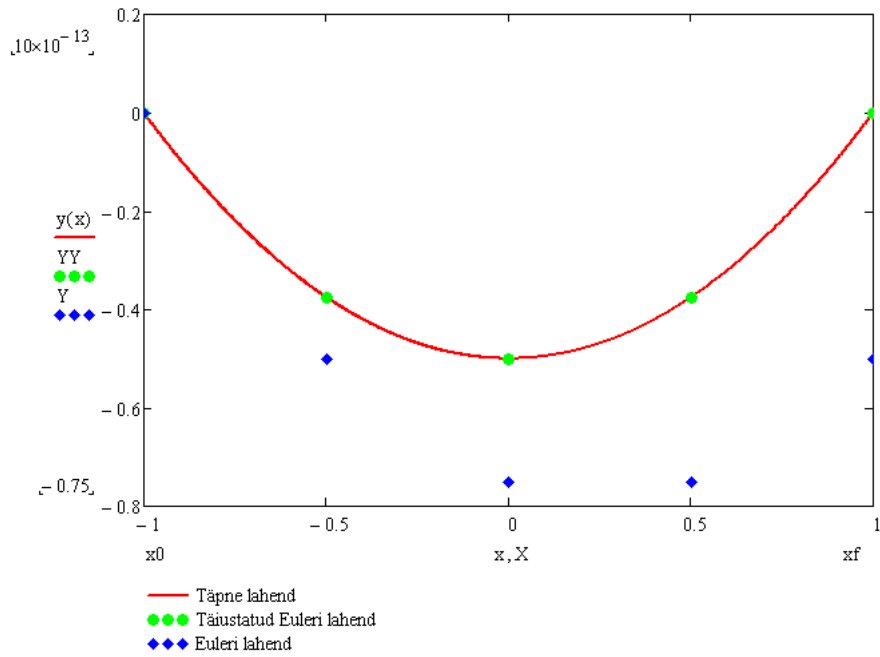
Moodustame Cauchy ülesande

$$y' = x, \quad y(-1) = 0.$$

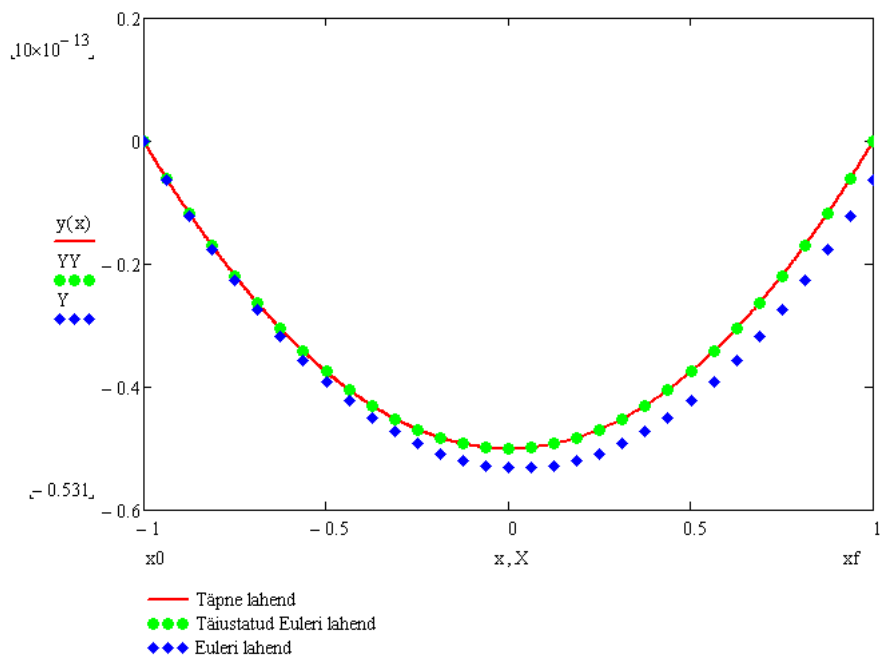
Leiame Euleri meetodiga, kasutades sammu  $h = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} y_{-\frac{1}{2}} &= 0 + \frac{1}{2} \times (-1) &= -\frac{1}{2}, \\ y_0 &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) &= -\frac{3}{4}, \\ y_{\frac{1}{2}} &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times 0 &= -\frac{3}{4}, \\ y_1 &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tulemus on Euleri meetodi korral üsna ebatäpne, aga toome võrdluseks graafiku täpse lahendi, Euleri meetodi ja täiustatud Euleri meetodi vahel, kus on kasutatud viite sõlme, ehk  $N = 4$ :



Täiustatud Euleri meetodi töötab oluliselt paremini. Me saame tegelikult ka Euleri meetodiga suhteliselt hea tulemuse, kui suurendame sõlmede arvu. Toome joonise  $N = 32$  jaoks:



◇

**Näide 3.4.** Võtame vaatluse alla mõne keerulisema integraali. Näiteks

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin s} \, ds$$



ei ole leitav elementaarfunktsioonide abil. Integraali väärtus  $I \approx 2.39628$  on leitud arvutiprogrammidega, mis kasutavad siinkohal elliptilisi funktsioone. Paneme tähele, et  $\sqrt{\sin x}$  on sümmeetriline punkti  $x = \frac{\pi}{2}$  suhtes. Seega võime leida

$$I = \int_0^{\pi} \sqrt{\sin s} ds = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin s} ds.$$

Moodustame vastava Cauchy ülesande

$$y' = 2\sqrt{\sin x}, \quad y(0) = 0.$$

Sel juhul lahendi  $y$  korral  $I = y(\pi/2)$ . Toome võrdluseks Cauchy ülesande lahendamiseks kasutatud Euleri meetodiga ja Täiustatud Euleri meetodiga leitud lähisväärtused:

N	Euleri meetod	viga	Täiustatud Euler	viga
2	1.32088	1.075	2.10628	0.290
4	1.90121	0.495	2.29391	0.102
8	2.16375	0.233	2.36010	0.036
16	2.28532	0.111	2.38349	0.013
32	2.34267	0.054	2.39176	0.005

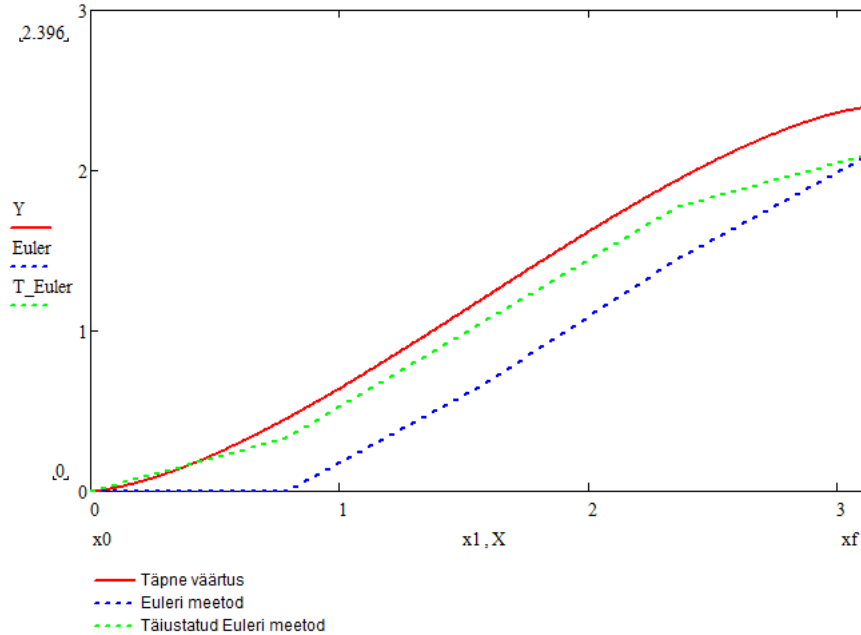
Toome näiteks ka sellise lahenduse, kus me ei kasuta integraaliga seotud sümmeetria omadusi. Sel juhul koostame Cauchy ülesande

$$y' = \sqrt{\sin x}, \quad y(0) = 0.$$

Siin lahendi  $y$  korral  $I = y(\pi)$ . Nüüd juhtub selline efekt, et täiustatud Euleri meetodi ei anna meile paremat tulemust punktis  $x = \pi$  (kuigi vahepealsetes punktides annab). Põhjuseks on asjaolu, et  $f(\pi, y) = \sqrt{\sin \pi} = 0$  iga  $y$  väärtuse korral ja täiustatud Euleri meetod ei anna viimasel osalõigul oma lisakordajaga  $K_2 = h f(x_{n-1} + h, y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}))$  mitte midagi juurde.

N	Euleri meetod	viga	Täiustatud Euler	viga
2	1.57080	0.825	1.57080	0.825
4	2.10628	0.290	2.10628	0.290
8	2.29391	0.102	2.29391	0.102
16	2.36010	0.036	2.36010	0.036
32	2.38349	0.013	2.38349	0.013

Olgu toodud joonis Euleri meetodi ja täiustatud Euleri meetodi käitumise kohta antud ülesande lahendamisel 4 osalõigu korral (näeme, et siin täiustatud Euleri meetod kaotab oma eelise viimasel osalõigul).



◇

Selliselt saab integraali leida ka teiste meetoditega, sealhulgas palju täpsemate meetoditega, mida vaatame tulevastes praktikumides. Loomulikult on sellised numbrilised meetodid pigem kasutamiseks koos arvutiga, käsitsi leidmisel on tehtav töö liialt suur. Käsitsi tegemiseks sobivad aga küllalt hästi meie poolt vaadeldud kaks esimest meetodit: iteratsioonimeetod ja lahendi arendamine astmeritta.

### 3.4 I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemid

Olgu meil antud  $m$  võrrandist koosnev harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1'(x) = f_1(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \\ z_2'(x) = f_2(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \\ \dots \\ z_m'(x) = f_m(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \end{array} \right\} \quad (3.8)$$

koos algtingimustega

$$z_1(x_0) = u_0^1, \quad \dots, \quad z_m(x_0) = u_0^m. \quad (3.9)$$

Tähistades otsitavate funktsioonide  $z_1(x), \dots, z_m(x)$  väärtusi sõlmedes  $x_0, \dots, x_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$  järgmiselt:

$$z_1(x_i) = z_{1,i}, \dots, z_m(x_i) = z_{m,i}, \quad i = 0, \dots, N,$$

saame näiteks Euleri meetodit kasutades välja kirjutada

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1,i+1} = z_{1,i} + h f_1(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{m,i}) \\ z_{2,i+1} = z_{2,i} + h f_2(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{m,i}) \\ \dots \\ z_{m,i+1} = z_{m,i} + h f_m(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{m,i}) \end{array} \right\}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (3.10)$$

Viimane on vektorkujul lihtsalt kirja pandav,

$$\vec{Z}_{i+1} = \vec{Z}_i + h \vec{F}(x_i, \vec{Z}_i), \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (3.11)$$

või ka kujul

$$\begin{pmatrix} z_{1,i+1} \\ z_{2,i+1} \\ \vdots \\ z_{m,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,i} \\ z_{2,i} \\ \vdots \\ z_{m,i} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1(x_i, \vec{Z}_i) \\ f_2(x_i, \vec{Z}_i) \\ \vdots \\ f_m(x_i, \vec{Z}_i) \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (3.12)$$

**Näide 3.5.** Vaatleme diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1' = z_2^2 - 2z_1 \\ z_2' = z_1 - z_2 - x z_2^2 \\ z_1(0) = 0 \\ z_2(0) = 2 \end{array} \right\},$$

kus otsitavateks on funktsioonid  $z_1(x)$  ja  $z_2(x)$ . Tähistame järgmised vektorid

$$\vec{Z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{Z}_1 = \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \vec{Z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(x, \vec{Z}) = \begin{pmatrix} z_2^2 - 2z_1 \\ z_1 - z_2 - x z_2^2 \end{pmatrix}.$$

Olgu  $h = 1/2$ , siis  $x_1 = x_0 + h = 1/2$ . Leiame vektori  $\vec{Z}_1$  väärtused Euleri meetodiga

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_0 + h \vec{F}(0, \vec{Z}_0)$$

ehk

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^2 - 2 \cdot 0 \\ 0 - 2 - 0 \cdot 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Saime, et  $z_1(0.5) \approx 2$  ja  $z_2(0.5) \approx 1$ .  $\diamond$

### 3.5 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid

Olgu antud  $m$ -järku ( $m \geq 2$ ) harilik diferentsiaalvõrrand normaalkujul

$$y^{(m)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x)) \quad (3.13)$$

koos algtingimustega

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{m-1}. \quad (3.14)$$

Võttes appi uued muutujad

$$z_i := y^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (3.15)$$

saame ülesande (3.13) taandada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemile

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = z_1(x) \\ z_1'(x) = z_2(x) \\ z_2'(x) = z_3(x) \\ \dots \\ z_{m-2}'(x) = z_{m-1}(x) \\ z_{m-1}'(x) = F(x, y(x), z_1(x), \dots, z_{m-1}(x)) \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

ning algtingimused (3.14) teisenevad kujule

$$y(x_0) = y_0, \quad z_1(x_0) = y_0^1, \quad \dots, \quad z_{m-1}(x_0) = y_0^{m-1}. \quad (3.17)$$

Osutub, et arvutitega on süsteemi (3.16)-(3.17) üldjuhul palju lihtsam lahendada kui esialgset ülesannet (3.13)-(3.14).

**Näide 3.6.** Vaatleme kolmandat järku diferentsiaalvõrrandit

$$y''' = -y y' + x \sin(y'')$$

algtingimustega

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

Teeme muutujavahetused

$$z_1(x) = y'(x), \quad z_2(x) = y''(x).$$

Sel juhul saame diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = z_1 \\ z_1' = z_2 \\ z_2' = -y z_1 + x \sin z_2 \end{array} \right\}$$

koos algtingimustega

$$y(0) = z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 1.$$

Süsteemi lahendamine annab meile lisaks esialgse võrrandi lahendile  $y(x)$  veel tema esimese tuletise  $z_1(x)$  ja teise tuletise  $z_2(x)$ , mida tegelikult meil otseselt vaja ei lähe.

◇

## Viited

- [1] N. Collier, A. Kaw. Holistic Numerical Methods Institute. University of South Florida. <http://numericalmethods.eng.usf.edu/>
- [2] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [3] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu Ülikooli Kirjastus 2011.
- [4] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.
- [5] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.