

4 Runge-Kutta meetodid. Runge veahindamismeetod

Sisukord

4 Runge-Kutta meetodid. Runge veahindamismeetod	34
4.1 Runge-Kutta meetodite tuletamine	34
4.2 Runge-Kutta meetodite arvutuseeskirjad	36
4.3 Runge veahindamismeetod	40

4.1 Runge-Kutta meetodite tuletamine

Käesoleva peatüki materjal põhineb suuresti õpikul [5] ja konspektil [3]. Osad joonised pärinevad materjalist [4].

Cauchy ülesande lahendamisel on väga suurt populaarsust võitnud Runge-Kutta tüüpi meetodid. Carl Runge (1856-1927) ja Wilhelm Kutta (1867-1944) olid saksa matemaatikud. Idee pärineb C. Rungelt (1895) ja meetodeid on täiustanud W. Kutta ja teiseid matemaatikud.

Me otsime lahendit y lõigul $[a, b]$. Jagame lõigu $[a, b]$ võrdseteks osalõikudeks, saame sõlmed

$$a = x_0, x_1, \dots, x_{N-1}, x_N = b, \quad N \in \mathbb{N},$$

ehk

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \dots, N, \quad h := \frac{b - a}{N}.$$

Tähistame lahendi y ligikaudseid väärtusi sõlmedes

$$y_i \approx y(x_i), \quad i = 0, \dots, N.$$

Kui on näidatud meetod (algoritm), kuidas punkti (x_0, y_0) järgi leida punkti (x_1, y_1) , siis protsessi kordamisega võime ligikaudsed väärtused y_i leida suvalise väärtuse

tuse $i = 1, \dots, N$ jaoks. Seega võime järgnevalt vaadelda ainult esimest sammu, s.t. kuidas leida täpse lahendi y ligikaudset väärtust y_1 sõlmes x_1 .

Üldine Runge-Kutta meetodite skeem on

$$y_1 = y_0 + h \Delta y_0, \quad (4.1)$$

kus tundmatu arv Δy_0 leitakse seosega

$$\Delta y_0 = \gamma_1 K_1 + \dots + \gamma_r K_r, \quad r \in \mathbb{N} \quad (4.2)$$

Siin K_j on arvud (nn. „vektori“ tõusud), mis leitakse valemitest

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_0, y_0), \\ K_2 &= f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + h \beta_{21} K_1), \\ K_3 &= f\left(x_0 + \alpha_3 h, y_0 + h \left[\beta_{31} K_1 + \beta_{32} K_2 \right]\right), \\ &\dots \\ K_r &= f\left(x_0 + \alpha_r h, y_0 + h \left[\beta_{r1} K_1 + \dots + \beta_{r,r-1} K_{r-1} \right]\right) \end{aligned}$$

Siin α_i , β_{ij} ja γ_i on teatavad konstandid, mis valitakse nii, et etteantud r korral saaksime võimalikult kõrge täpsusastmega meetodi, s.t.

$$y(x_1) - y_1 = \Theta h^{r+1},$$

kus r on võimalikult suur naturaalarv ja Θ on tõkestatud suurus protsessis $h \rightarrow 0$.

Kordajate α_i , β_{ij} ja γ_i leidmiseks saame tingimused, kui arendame lahendi y Taylori ritta kohal x_0 ja K_2, \dots, K_r avaldistes oleva funktsiooni f arendame Taylori ritta kohal (x_0, y_0) ning nõuame, et saadavates y ja y_1 arendustes võimalikult palju esimesi h astmete kordajaid ühtiksid. Seejuures eeldame, et vaja minevad funktsiooni f osatuletised on vaadeldavas piirkonnas pidevad.

Kordajajaid α_i , β_{ij} ja γ_i võib olla lõpmata palju erinevaid komplekte ja neid esitatakse tihti tabelitena

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \alpha_2 & \beta_{2,1} & & & \\ \alpha_3 & \beta_{3,1} & \beta_{3,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \alpha_r & \beta_{r,1} & \beta_{r,2} & \cdots & \beta_{r,r-1} \\ \hline & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{r-1} & \gamma_r \end{array} \quad (4.3)$$

4.2 Runge-Kutta meetodite arvutuseeskirjad

Tuletame järgnevalt mõned Runge-Kutta meetodid väiksemate r väärtuste jaoks. Olgu lahend $k + 1$ korda pidevalt diferentseeruv punktis x_0 . Arendades y Tayloriga ritta punktis x_0 saame

$$y(x) = \sum_{i=0}^k \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}, \quad \xi \in (x_0, x). \quad (4.4)$$

Kirjutame y Tayloriga rea (4.4) välja punktis x_1 ,

$$y(x_1) = \sum_{i=0}^k \frac{y^{(i)}(x_0)}{i!} h^i + \frac{y^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1}, \quad \xi \in (x_0, x_1), \quad (4.5)$$

või siis seost $y'(x) = f(x, y)$ arvestades

$$y(x_1) = y_0 + h f(x_0, y_0) + \frac{h^2}{2} [f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) f(x_0, y_0)] + \dots \quad (4.6)$$

Olgu $\mathbf{r} = \mathbf{1}$, siis y_1 esitus (4.1)-(4.2) võtab kuju

$$y_1 = y_0 + \gamma_1 K_1 = y_0 + \gamma_1 h f(x_0, y_0).$$

Viimane avaldis ühtib avaldise (4.6) kahe esimese liikmega, kui $\gamma_1 = 1$. Saame esimese astme Runge-Kutta meetodi kujul

$$\boxed{y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)} \quad (4.7)$$

milles tunneme ära juba varem vaadeldud Euleri meetodi.

Olgu $\mathbf{r} = \mathbf{2}$, siis y_1 esitus (4.1)-(4.2) võtab kuju

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \left[\gamma_1 K_1 + \gamma_2 K_2 \right] \\ &= y_0 + \gamma_1 h f(x_0, y_0) + \gamma_2 h f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + h \beta_{21} f(x_0, y_0)). \end{aligned}$$

Arendame $f(x_0 + \alpha_2 h, y_0 + h \beta_{21} f(x_0, y_0))$ Tayloriga ritta kohal (x_0, y_0) .

Märkus 4.1. Kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ Tayloriga rida punktis (x_0, y_0) on välja kirjutatav võrdusega (eeldusel, et f_{xy} ja f_{yx} on pidevad punktis (x_0, y_0))

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)(y - y_0) \right. \\ &\left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)} (y - y_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.8)$$

Kasutame viimase võrrandi jaoks lihtsamat kuju

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\
 &+ \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right] \\
 &+ \dots
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Seega,

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + \gamma_1 h f(x_0, y_0) \\
 &+ \gamma_2 h [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\alpha_2 h + f_y(x_0, y_0)\beta_{21} h f(x_0, y_0) + \dots].
 \end{aligned}$$

Kirjutamata jäetud liikmetes esineb h^3 ja kõrgemad h astmed. Seega saame

$$\begin{aligned}
 y_1 &= y_0 + (\gamma_1 + \gamma_2) h f(x_0, y_0) + \\
 &h^2 [\gamma_2 \alpha_2 f_x(x_0, y_0) + \gamma_2 \beta_{21} f_y(x_0, y_0) f(x_0, y_0)] + O(h^3).
 \end{aligned}$$

Suuruse y_1 reaksarenduse liikmed, mis sisaldavad h esimest ja teist astet, ühtivad valemi (4.6) vastavate liikmetega, kui

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \quad \gamma_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_2 \beta_{21} = \frac{1}{2}.$$

Saime kolm võrrandit nelja tundmatu γ_1 , γ_2 , α_2 ja β_{21} leidmiseks. Nendest ühe võib ise vabalt valida. Näiteks, fikseerides $\gamma_2 \neq 0$, saame

$$\gamma_1 = 1 - \gamma_2, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2\gamma_2}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{2\gamma_2}.$$

Seega on teist järku Runge-Kutta skeeme lõpmata palju.

Definitsioon 4.1. Olgu lähisväärtused y_0, y_1, \dots, y_i leitud täpselt. Me nimetame lähismeetodi sammul tekkivaks veaks suurust

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})| \quad i = 0, 1, 2, \dots, \tag{4.10}$$

kus y on võrrandi $y' = f(x, y)$ täpne lahend ja y_{i+1} sama lähismeetodiga leitud ligikaudne väärtus.

Definitsioon 4.2. Kui Cauchy ülesande mingi lähismeetodi korral kehtib protsessis $h \rightarrow 0$ võrratus

$$E_i = |y_i - y(x_i)| \leq \Theta h^{k+1}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \tag{4.11}$$

tõkestatud suuruse $\Theta > 0$ korral, siis öeldakse, et see lähismeetod on k -järku meetod. Mõnikord me ütleme ka, et meetodi viga on järku $O(h^k)$.

Iga parameetrite valiku korral on Runge-Kutta meetodite ($r = 2$) sammul tekkiv viga hinnatav kui

$$|y(x_1) - y_1| \leq \Theta h^3,$$

s.t. saadud meetod on teist järku.

Konkreetselt, näiteks $\gamma_2 = 1$, $\gamma_1 = 0$, $\alpha_2 = 1/2$ ja $\beta_{21} = 1/2$ korral saame keskpunkti meetodi (*Midpoint Method*):

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_0, y_0) \\ K_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{h}{2}K_1\right) \\ y_1 &= y_0 + hK_2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Näiteks $\gamma_2 = 1/2$, $\gamma_1 = 1/2$, $\alpha_2 = 1$ ja $\beta_{21} = 1$ korral saame trapetsmeetodi ehk täiustatud Euleri meetodi

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_0, y_0) \\ K_2 &= f(x_0 + h, y_0 + hK_1) \\ y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}[K_1 + K_2] \end{aligned} \tag{4.13}$$

Üks populaarsemaid Runge-Kutta meetodeid on 4-järku 4-astmeline meetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[K_{i,1} + 2K_{i,2} + 2K_{i,3} + K_{i,4} \right], \quad i = 0, \dots, N-1, \tag{4.14}$$

kus

$$\begin{aligned} K_{i,1} &= f(x_i, y_i), \\ K_{i,2} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_{i,1}\right), \\ K_{i,3} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_{i,2}\right), \\ K_{i,4} &= f(x_i + h, y_i + hK_{i,3}). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Neljandat järku meetodis arvutatakse tõusu $f(x, y)$ väärtus peale mõlema otspunkti veel lõigu $[x_i, x_{i+1}]$ keskel, kasutades selleks keskpunkti meetodi abi. Suurem kaal pannakse lõigu keskel saadud tulemustele.

Märkus 4.2. Kirjanduses on tihti levinud Runge-Kutta meetodi kasutamine ilma järku nimetamata. Sel juhul mõeldakse just nimelt 4-järku meetodit (4.14).

Märkus 4.3. Runge-Kutta meetodeid saab tuletada ka $m > 4$ jaoks, kuid siis enamasti ei õnnestu enam saada m -järku meetodit. Oma arvutusrohkuse tõttu (tuleb arvutada palju $f(x, y)$ väärtusi) ei ole kõrgemat järku meetodid praktilistes arvutustes just eriti levinud.

Runge-Kutta meetodeid eelistatakse juhul, kui vabaliikme $f(x, y)$ arvutamine on "odav" (s.t. läheb vaja vähe arvutustehteid). Runge-Kutta meetodid on väga sobilikud ka siis, kui arvutusaeg ei ole väga oluline, enamusel juhtudel on 4-järku meetod juba piisavalt täpne ja kiire.

Märkus 4.4. Kui me räägime meetodi koonduvuskiirusest, siis näiteks 4-järku meetodi korral tähendab see, et tegelik viga $G_i = |y_i - y(x_i)|$ koondub nulli kui $h \rightarrow 0$ ning selliselt, et iga sammu h kahekordsel vähendamisel kahaneb viga vähemalt $2^4 = 16$ korda (piisavalt väikese sammu pikkuse h korral).

Runge-Kutta meetodid ei kasuta lõigu $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, N-1$, jaoks arvutustes ära infot varem leitud lähisväärtuste y_0, \dots, y_{i-1} kohta. Iga osalõigu $[x_i, x_{i+1}]$, jaoks on arvutuseeskiri sama. Seetõttu on meetodit lihtne kirja panna. Sellist meetodit nimetatakse ka ühesammuliseks meetodiks.

Esitame ka ühe 3-järku 3-astmelise meetodi,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} \left[K_{i,1} + 4K_{i,2} + K_{i,3} \right], \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (4.16)$$

kus

$$\begin{aligned} K_{i,1} &= f(x_i, y_i), \\ K_{i,2} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}K_{i,1}\right), \\ K_{i,3} &= f(x_i + h, y_i - h[K_{i,1} - 2K_{i,2}]). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Näide 4.1. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = xy + x^3, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Võrdleme seni tutvustatud meetoditega tegelikku viga punktis $x = 1$ ehk $G_n = |y_n - y(1)|$. Tumedalt on trükitud vastavate vigade suhted.

n	$h = \frac{1}{n}$	Euleri G_n	Trapetsi G_n	Keskpunkti G_n	4-järku R-K G_n
16	6.25×10^{-2}	1.1×10^{-1} 1.94	4.1×10^{-4} 3.75	2.5×10^{-3} 3.91	2.2×10^{-7} 16.16
32	3.13×10^{-2}	5.7×10^{-2} 1.97	1.1×10^{-4} 3.87	6.3×10^{-4} 3.95	1.4×10^{-8} 16.09
64	1.57×10^{-2}	2.9×10^{-2} 1.98	2.8×10^{-5} 3.94	1.6×10^{-4} 3.98	8.5×10^{-10} 16.05
128	7.81×10^{-3}	1.5×10^{-2} 1.99	7.1×10^{-6} 3.97	4.0×10^{-5} 3.99	5.3×10^{-11} 16.03
256	3.91×10^{-3}	7.3×10^{-3} 2.00	1.8×10^{-6} 3.98	1.0×10^{-5} 3.99	3.3×10^{-12} 16.00
512	1.95×10^{-3}	3.7×10^{-3} 2.00	4.5×10^{-7} 3.99	2.5×10^{-6} 4.00	2.1×10^{-13} 11.64
1024	9.77×10^{-4}	1.8×10^{-3}	1.1×10^{-7}	6.3×10^{-7}	1.8×10^{-14}

Tabelist on näha, et Runge-Kutta 4-järku meetodi korral on viga oluliselt väiksem (tõttöelda muutub see juba nii väikseks, et masinatäpsuse saavutamine rikub viimase rea „teoreetilise“ tulemuse). Samuti näeme, et Euleri meetodi korral väheneb viga sammu pikkuse poolitamisel umbes 2 korda, keskpunkti ja trapetsmeetodiga 4 korda ja Runge-Kutta 4-järku meetodiga 16 korda. \diamond

4.3 Runge veahindamismeetod

Seni oleme vaadelnud juhte, kus sammu pikkus h fikseeritakse ja edaspidi kasutatakse seda sama sammu pikkust. Iseenesest ei ole see mõistlik ega ka ilmtingimata vajalik. Erinevate lahendite korral võib vaja minna kas siis väga väikest sammu pikkust h või siis hoopis suuremat h väärtust (vastasel korral teeme liiga palju arvutusi ja viimane ei ole samuti mõistlik).

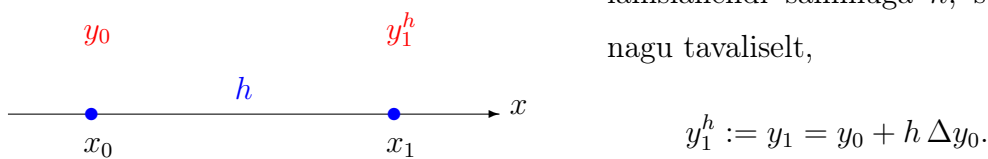
Oletame hetkel, et meil õnnestub kuidagi ligikaudselt arvutada sammul tekkiva vea suurust $E_i = |y_i - z(x_i)|$. Sel juhul andes ette meile vastuvõetava vea suuruse ε (sama arutus käib suhtelise vea $\frac{E_i}{|y_i|} < \varepsilon$ kohta), võime igal sammul käituda loogiliselt järgmiselt:

1. Kui sammul tekkiv viga $E_i < \varepsilon$, siis jätkame sama sammu pikkusega h ;

2. Kui sammul tekivad vigad $E_i > \varepsilon$, siis arvutame järgmise lähisväärtuse uuesti pooliku sammu pikkusega $\frac{h}{2}$ (lähtudes samadest algandmetest x_{i-1} ja y_{i-1});
3. Kui sammul tekivad vigad E_i on oluliselt väiksem kui ε , siis jätkame uue topelt sammu pikkusega $2h$ (näiteks kui sammul tekivad vigad on rohkem kui 10 korda väiksem kui lubatud ε).

Kõige lihtsam meetod sammul tekkiva vea hindamiseks on sammu poolitamise võte.

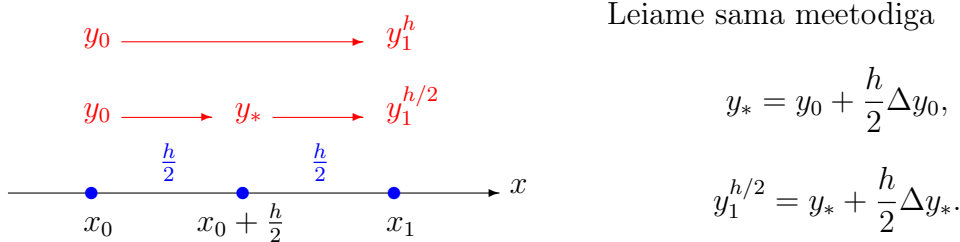
Esiteks leiame Runge meetodiga lähislahendi sammuga h , s.t. nii nagu tavaliselt,



Siis r -järku meetodiga leitud lähislahendi sammul tekivad vigad on

$$y(x_1) - y_1^h \approx \Theta h^{r+1}, \quad (4.18)$$

kus Θ on mingi konstant, mida me kahjuks ei tea ja mille asemel me sooviks näha midagi konkreetsemat. Järgnevalt leiame sama meetodiga lähislahendi punktis $x_1 = x_0 + h$, kuid seekord poole sammu pikkusega $h/2$, s.t. me rakendame oma meetodit kaks korda järjest. Selleks kasutame lõigu keskpunkti $x_0 + h/2$, kus lähislahendi tähistame y_* .



Sellisel juhul saame esimesel poolsammul tekkiva vea

$$y(x_0 + h/2) - y_* \approx \Theta \left(\frac{h}{2}\right)^{r+1}.$$

Järgmisel poolsammul tehakse sama suurusjärku viga, mistõttu saame tulemuseks nende vigade summa

$$y(x_1) - y_1^{h/2} \approx 2\Theta \left(\frac{h}{2}\right)^{r+1}.$$

Toodud seostest $y(x_1) - y_1^h$ ja $y(x_1) - y_1^{h/2}$ kohta saame leida, et

$$y(x_1) - y_1^h \approx \Theta h^{r+1} = 2^r \left[2 \Theta \left(\frac{h}{2} \right)^{r+1} \right] \approx 2^r \left(y(x_1) - y_1^{h/2} \right).$$

Seega $y(x_1) - y_1^h \approx 2^r \left(y(x_1) - y_1^{h/2} \right)$ ja siit saame avaldada $y(x_1)$:

$$\boxed{y(x_1) \approx y_1^{h/2} + \frac{y_1^{h/2} - y_1^h}{2^r - 1}} \quad (4.19)$$

Valemit (4.19) saab kasutada ka $y(x_1)$ lähisväärtuse täpsustamiseks, kuna võime y_1 väärtuseks võtta $y_1^{h/2}$ asemel valemiga (4.19) leitud väärtuse.

Märkus 4.5. *Valemis (4.19) toodud lahendi täpsustamist nimetatakse ka lokaalseks ekstrapoleerimiseks.*

Ligikaudne viga punktis x_1 on leitav valemiga

$$\boxed{E_1 = |y(x_1) - y_1^{h/2}| \approx \frac{|y_1^{h/2} - y_1^h|}{2^r - 1}} \quad (4.20)$$

Valem (4.20) annab meile ligikaudse vea sõlmes x_1 täpse lahendi y ja lähislahendi y_1 vahel, kui kasutaksime arvutamiseks sammu $h/2$. Sel juhul lõigu $[x_0, x_1]$ keskpunktis $x_0 + h/2$ on viga leitav valemiga

$$|y(x_0 + h/2) - y_*| \approx \frac{1}{2} \frac{|y_1^{h/2} - y_1^h|}{2^r - 1}. \quad (4.21)$$

Näide 4.2. Vaatleme Cauchy ülesannet

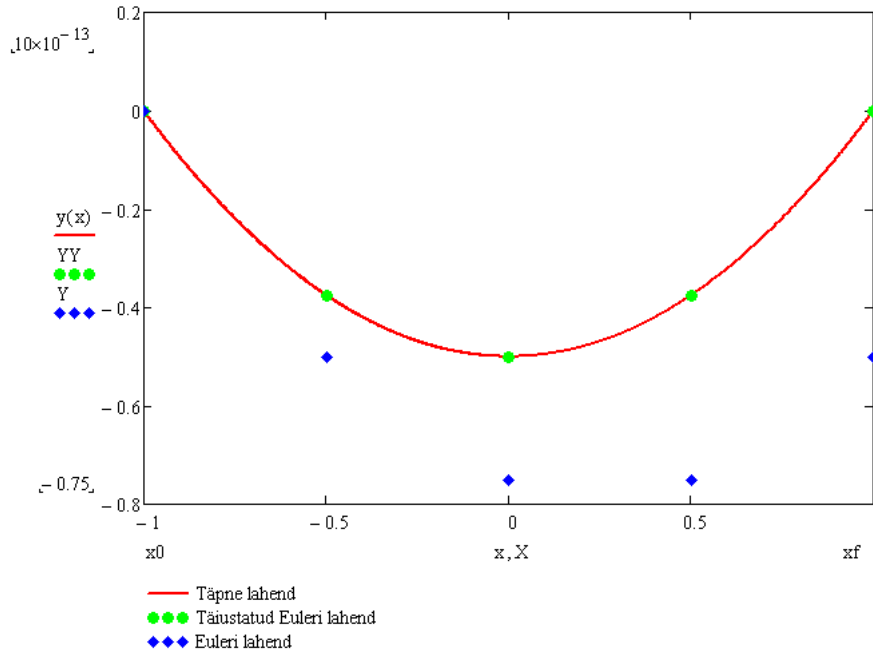
$$y' = x, \quad y(-1) = 0.$$

Leiame Euleri meetodiga y väärtuse punktis null, kasutades sammu $h = 1$:

$$y_0^h = 0 + 1 \times (-1) = -1.$$

Leiame uuesti väärtuse punktis null, kasutades sammu $h = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} y_{-\frac{1}{2}} &= 0 + \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}, \\ y_0^{h/2} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$



Seega sammul tekkiv viga on euleri meetodiga ($r = 1$) ligikaudselt leitav

$$y(0) - y_0^{h/2} \approx \frac{y_0^{h/2} - y_0^h}{2^1 - 1} = -\frac{3}{4} - (-1) = \frac{1}{4}.$$

Vahetult võib kontrollida, et meie ülesande täpne lahend on $y(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$. Seega punktis null on tegelik viga

$$y(0) - y_0^{h/2} = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

Enamasti siiski ei juhtu, et saaksime ligikaudse vea ja tegeliku vea omavahel nii täpselt klappima panna. Kasutame $y_0^{h/2}$ täpsustamiseks valemit (4.19):

$$\tilde{y}_0 = y_0^{h/2} + \frac{y_0^{h/2} - y_0^h}{2^1 - 1} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Seekord on tegelik viga

$$y(0) - \tilde{y}_0 = -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Antud juhul täpsustamine aitas nii hästi, et kogemata saime koguni täpse väärtuse.

◇

Näide 4.3. Vaatleme näiteks Runge-Kutta 4-järku meetodit (sel juhul $k = 4$). Sammul tekkiv viga on siis ligikaudselt leitav valemiga

$$E_{i+1} = |y_{i+1}^{h/2} - y(x_{i+1})| \approx \frac{|y_{i+1}^{h/2} - y_{i+1}^h|}{15}. \quad (4.22)$$

Lahendi y väärtus punktis x_{i+1} on täpsustatav valemiga

$$y_{i+1} = y_{i+1}^{h/2} + \frac{y_{i+1}^{h/2} - y_{i+1}^h}{15}, \quad (4.23)$$

mis on tinglikult 5-järku meetod (vt. kommentaare [4] Runge-Kutta meetodite peatükist). \diamond

Märkus 4.6. *Oma arutlustes eeldasime, et arvutamine toimub täpselt. Tegelikus arvutusprotsessis esinevad paratamatult eksimused arvutustes ja ümardamisvead. Eksimused tuleb avastada ja parandada. Eksimuste olemasolule viitab tavaliselt asjaolu, et mõnel kaksiksammul saame valemite (4.20) ja (4.21) abil järsult suurema vea, kui ülejäänud sammude korral.*

Ümardamisvigu tuleb aga eraldi arvestada ja lisada see meetodi oletatavale veale.

Märkus 4.7. *Lokaalne ekstrapoleeriv valem (4.23) on küll väga kõrget järku meetod koos võimalusega arvutada ligikaudselt ka sammul tekkivat viga, kuid antud meetod nõuab igal sammul 11 uut funktsiooni $f(x, y)$ väärtuse arvutamist (4 sammuga h ja 4+4 sammuga $h/2$, millest ühine on ainult $K_{i,1} = f(x_i, y_i)$). Lisaks, 5-järku Runge-Kutta meetodi korral peaksime tegema 17 uut funktsiooni $f(x, y)$ väärtuse arvutamist. See teeb sammu poolitamise võtte kõrget järku meetodite korral väga ebaefektiivseks.*

Viited

- [1] N. Collier, A. Kaw. Holistic Numerical Methods Institute. University of South Florida. <http://numericalmethods.eng.usf.edu/>
- [2] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [3] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.
- [4] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing, Second Edition. Vol. 1 of Fortran Numerical Recipes. Cambridge University Press, reprinted 2001. ISBN 0-521-43064-X.
- [5] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.