

## 5 Adamsi ilmutatud ja ilmutamata diferentsvalemid

### Sisukord

|  |           |
|--|-----------|
| <b>5 Adamsi ilmutatud ja ilmutamata diferentsvalemid</b> | <b>45</b> |
| 5.1 Ilmutatud Adamsi valemid . . . . .                   | 45        |
| 5.2 Adamsi diferentsvalemite tuletamine . . . . .        | 49        |
| 5.3 Ilmutamata Adamsi valemid . . . . .                  | 52        |
| 5.4 Üldised diferentsmeetodid . . . . .                  | 53        |
| 5.5 Ilmutamata diferentsvalemite kasutamine . . . . .    | 54        |

Käesolev peatükk on kirjutatud konspekti [2] ja [3] põhjal. Ühesammulised meetodid nagu näiteks Runge-Kutta meetodid arvestasid  $y_{i+1}$  leidmisel ainult seni arvutatud lähislahendi  $y_i$  ja funktsiooni  $f$  väärtust  $f(x_i, y_i)$ , seejuures tehti palju lisarvutusi tulemuse täpsustamiseks. Selline lähenemine on algtingimustega ülesannete puhul loomumane.

Mitmesammuliste meetodite puhul üritatakse ära kasutada seni leitud lahendist rohkem väärtusi (nn. lahendis endas peituvat informatsiooni) ja igal sammul arvutatakse juurde ainult üks funktsiooni  $f$  väärtus  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

### 5.1 Ilmutatud Adamsi valemid

**Adams-Bashforth'i kahesammuline ilmutatud meetod,**

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ \frac{3}{2}f(x_i, y_i) - \frac{1}{2}f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

Osutub, et see on teist järku meetod. Paneme tähele, et skeem vajab algtabelina väärtusi  $y_0$  (antud) ja  $y_1$  (tundmatu, mille võib näiteks leida mingi Runge-Kutta meetodiga). Toome võrdluseks ära teist järku Runge-Kutta meetodina keskpunkti meetodi,

$$y_{i+1} = y_i + h f \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Võrdluseks:

| 2-sammuline meetod  | 1-sammuline meetod  |
|---|---|
| $y_1 =$ leida mingi valitud meetodiga                               | $y_1 = y_0 + h f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0))$ |
| $y_2 = y_1 + h (\frac{3}{2} f(x_1, y_1) - \frac{1}{2} f(x_0, y_0))$ | $y_2 = y_1 + h f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1))$ |
| $y_3 = y_2 + h (\frac{3}{2} f(x_2, y_2) - \frac{1}{2} f(x_1, y_1))$ | $y_3 = y_2 + h f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2} f(x_2, y_2))$ |
| $y_4 = y_3 + h (\frac{3}{2} f(x_3, y_3) - \frac{1}{2} f(x_2, y_2))$ | $y_4 = y_3 + h f(x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2} f(x_3, y_3))$ |

Näeme, et Runge-Kutta 2-järku meetodis tuleb igal sammul teha kaks uut funktsiooni  $f$  väärtuse arvutamist, kuid kahesammulises meetodis ainult üks uus funktsiooni  $f$  väärtus (kõik ülejäänud väärtused on varem leitud,  $f$  väärtusi arvutatakse ainult „täissõlmedes“  $x_i$  ja need salvestatakse arvutis eraldi vektorisse).

Edaspidi tähistame funktsiooni  $f$  väärtusi punktis  $(x_i, y_i)$  järgmiselt:

$$f_i := f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Olgu meil jällegi lõigul  $[a, b]$  antud sõlmed

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b.$$

Tähistame  $h = \frac{b-a}{N}$ . Lisaks,  $y_i = y(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

**Definitsioon 5.1.** Diferentsvalemit kujul

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} + \dots + \beta_k f_{i-k} \right], \quad 0 \leq k \leq i \quad (5.3)$$

nimetatakse **ilmutatud Adamsi valemiks** ehk Adamsi ekstrapolatsioonivalemiks.

Inglise astronoom John Couch Adams (1819-1892) avaldas selle valemi veidi teisel kujul juba aastal 1883.

Kordajad  $\beta_0, \dots, \beta_k$  on tavaliselt konkreetse valemi jaoks määratud. Seega näeme, et kui me teame algtabelit  $y_0, \dots, y_k$ , siis on valemis (5.3) võimalik  $y_{i+1}$  välja arvutada nii, et kasutatakse ära juba varem leitud väärtused  $y_0, \dots, y_i$  ja  $f_0, \dots, f_i$ . Siinjuures tehakse igal sammul ainult üks uus funktsiooni  $f$  arvutamine. Üldjuhul käib diferentsmeetodite kasutamine järgmise põhimõtte kohaselt:

**Näide 5.1.** Olgu antud ilmutatud Adamsi valem kujul

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} (23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}), \quad i \geq 2.$$

Kuna  $i \geq 2$ , siis selle skeemi abil saaksime esimese väärtusena leida  $y_3$ . Sel juhul läheb meil  $y_3$  leidmiseks vaja  $y_2$  väärtust ja lisaks  $f_0, f_1, f_2$ . Funktsiooni  $f$  arvutamiseks punktides  $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$  ja  $(x_2, y_2)$  on meil vaja teada ka  $y_0$  ja  $y_1$ .

1. Leiame algtabeli  $y_0, y_1, y_2$  mingi teise meetodiga, näiteks Runge-Kutta meetodiga või näiteks iteratsioonimeetodiga. Tavaliselt algtabel ei ole suur, tüüpiliselt mitte üle 5 liikme ja arvutustele tehtav ajakulu on üsna tühine. Saadud tulemused salvestatakse näiteks vektorisse  $\vec{Y} = (y_0, y_1, y_2)$ . Märgime, et Cauchy ülesande korral  $y_0$  on juba antud, seega meie juhul jääbki leida kaks väärtust  $y_1$  ja  $y_2$ .

2. Arvutame  $f_0, \dots, f_2$  ning salvestame kõik väärtused vektorisse  $\vec{F} = (f_0, f_1, f_2)$ .

3. Kasutame  $y_3$  leidmiseks meie valemit, kus uusi funktsiooni  $f$  väärtusi ei ole vaja leida. Saadud tulemuse lisame vektori  $\vec{Y}$  lõppu:  $\vec{Y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)$ ,

$$y_3 = y_2 + \frac{h}{12} (23 f_2 - 16 f_1 + 5 f_0).$$

4. Arvutame  $f_3 = f(x_3, y_3)$  ja pikendame  $F$  vektorit:  $\vec{F} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ .

5. Kasutame  $y_4$  leidmiseks uuesti meie valemit,

$$y_4 = y_3 + \frac{h}{12} (23 f_3 - 16 f_2 + 5 f_1).$$

Saadud tulemuse lisame vektori  $\vec{Y}$  lõppu:  $\vec{Y} = (y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$ .

6. Nii jätkame samm sammult kuni jõuame soovitud punkti (enamasti siis lõigu  $[a, b]$  parempoolsesse otspunkti  $b$ ).

◇

**Näide 5.2.** Vaatleme diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 10 \left( y \int_0^1 \sin(y+s) ds - x \int_0^1 \sin(x+s) ds \right) \\ \frac{dy}{dt} = x \int_0^1 \sin(x+s) ds \left( 28 - z \int_0^1 \sin(z+s) ds \right) - y \int_0^1 \sin(y+s) ds \\ \frac{dz}{dt} = xy \int_0^1 \sin(x+s) ds \int_0^1 \sin(y+s) ds - \frac{8}{3} z \int_0^1 \sin(z+s) ds \end{array} \right\}.$$

Algtingimuste  $x(500) = 6$ ,  $y(500) = 6$  ja  $z(500) = 6$  korral saame lõigul  $t \in [500, 500 + 0.01 N]$  lahendades järgmised arvutusajad (programmiga Mathcad 15, ütleme et umbes keskmise lauaarvutiga):

| N     | Runge-Kutta 4. järku valem | Adamsi ilmutatud skeem |
|-------|----------------------------|------------------------|
| 1024  | 1.1 sek                    | 0.3 sek                |
| 2048  | 2.4 sek                    | 0.7 sek                |
| 4096  | 4.6 sek                    | 1.2 sek                |
| 8192  | 8.3 sek                    | 2.1 sek                |
| 16384 | 16.7 sek                   | 4.2 sek                |
| 32768 | 33.5 sek                   | 8.5 sek                |

Adamsi skeemiks on 3-järku meetod  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$ , kuigi arvutusaegade mõttes ei ole suurt vahet, millist ilmutatud skeemi kasutada. Näeme, et Runge-Kutta meetod on tõepoolest umbes neli korda aeglasem, kuna igal sammul tehakse kolme  $f$  arvutuse asemel 12 arvutust (siin igal etapil tuleb arvutada kolme funktsiooni  $x(t), y(t), z(t)$  võrrandeid).

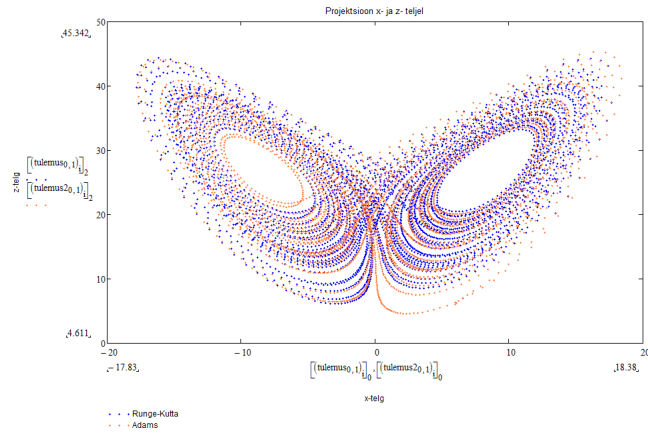
Eespool olev võrrandisüsteem on küll saadud veidi kunstlikult. Nimelt, asendatud on klassikalises Lorentzi süsteemis

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 10(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(28 - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z \end{array} \right\} \quad (5.4)$$

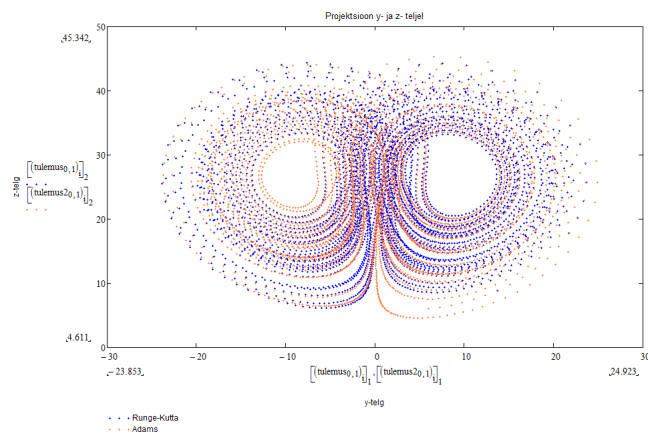
funktsioonid  $x, y$  ja  $z$  vastavate korrutistega, mis sisaldavad integraali siinusest. Süsteemi (5.4) võrduste parematel pooltel asuvad arvutuslikult oluliselt lihtsamad funktsioonid. Järgmisest tabelist näeme, et sel juhul mitmesammulisel meetodil nii suurt eelist ei ole (kuna pole midagi keerulist arvutada):

| N      | Runge-Kutta 4-järku valem | Adamsi ilmutatud skeem |
|--------|---------------------------|------------------------|
| 4096   | 0.02 sek                  | 0.00 sek               |
| 8192   | 0.04 sek                  | 0.02 sek               |
| 16384  | 0.07 sek                  | 0.04 sek               |
| 32768  | 0.13 sek                  | 0.08 sek               |
| 65536  | 0.27 sek                  | 0.16 sek               |
| 131072 | 0.58 sek                  | 0.33 sek               |

Lorentzi süsteem (5.4) on üheks klassikaliseks kaose tekkimise näiteks (sellise süsteemi puhul muudab pisemgi arvutusviga lõpptulemust väga oluliselt). Lorentzi süsteemi rakendatakse atmosfäärifüüsikas ilma ennustamise mudelites. Näiteks Lorentzi liblika graafik (ehk  $x$ - ja  $z$ -telje projektsioonid  $y$ -teljele) näeb välja selline:



Lorentzi öökulli silmade graafik (ehk  $y$ - ja  $z$ -telje projektsioonid  $x$ -teljele) :



◇

## 5.2 Adamsi diferentsvalemite tuletamine

Olgu  $y$  võrrandi  $y' = f(x, y)$  lahend lõigul  $[a, b]$ . Siis kehtib

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad \forall x \in [a, b].$$

Integreerime seda võrdust osalõigul  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(s) ds = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds.$$

Siit saame

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds. \quad (5.5)$$

Kasutades algtingimust  $y(x_0) = y_0$  saaksime samm-sammult arvutada  $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_N)$ . Probleem on aga selles, et me ei saa leida täpselt integraali  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds$ , kuna see sisaldab ka meile tundmatut funktsiooni  $y$ .

Intergraali leidmiseks saame appi võtta mingi kvadratuurvalemi. Enamasti on need kujul

$$\int_a^b F(s) ds \approx (b-a) \sum_{j=1}^m \beta_j F(t_j), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.6)$$

kus kordajad  $\beta_j$  on kvadratuurvalemi kaalud, mis on konkreetse kvadratuurvalemi jaoks juba teada ning  $t_j$  on kvadratuurvalemi sõlmed, mis on samuti teada. Valime  $(k+1)$  sõlmega kvadratuurvalemi, mille sõlmedeks on  $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$ ,  $i \geq k$ . Sel juhul nendes sõlmedes on meil leitud lahendi  $y$  lähisväärtused  $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}$ , mille abil saame arvutada  $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-k}$ . Sel juhul

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds \approx h \sum_{j=0}^k \beta_j f(x_{i-j}, y_{i-j}) = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{i-j}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Asendades integraali  $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$  asemel kvadratuursumma (5.7) valemisse (5.5), jõuamegi valemieni (5.3).

**Näide 5.3.** Kasutades avatud otspunktiga keskpunkti kvadratuurvalemit

$$\int_{t_0}^{t_1} g(x) dx = h g\left(t_0 + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^3}{24} g''(\xi), \quad \xi \in (t_0, t_1),$$

saame lõigul  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  kvadratuurvalemiks

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds \approx 2h f(x_i, y(x_i)) = 2h f_i.$$

Analoogiliselt eelnevaga saame kirjutada

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(s) ds = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds.$$

Siit saame ühe ilmutatud diferentsmeetodi

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2h f_i.$$

◇

**Näide 5.4.** Kasutades trapetsvalemit

$$\int_{t_0}^{t_1} g(x) dx = \frac{h}{2} (g(t_1) + g(t_0)) - \frac{h^3}{12} g''(\xi), \quad \xi \in (t_0, t_1),$$

saame lõigul  $[x_i, x_{i+1}]$  kvadratuurvalemiks

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds \approx \frac{h}{2} (f(x_{i+1}, y(x_{i+1})) + f(x_i, y(x_i))) = \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i).$$

Analoogiliselt eelnevaga saame kirjutada

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(s) ds = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds.$$

Siit saame ühe Adamsi ilmutamata skeemi (trapetsmeetodi)

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f_{i+1} + f_i).$$

◇

**Näide 5.5.** Kõrgemat järku valemite tuletamiseks alati tavapäraest kvadratuurvalemite kasutamisest ei piisa. Esiteks peame oma funktsiooni asendada mingi interpolatsioonipolünoomiga. Näiteks saame kasutada  $k$ -järku Lagrange'i interpolatsioonipolünoomi

$$g(t) \approx P_k(t) = \sum_{i=0}^k g(t_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^k \frac{t - t_j}{t_i - t_j},$$

mille korral kehtib polünoomi  $P_k$  võrdumine funktsiooniga  $g$  kõikides sõlmedes  $t_0, \dots, t_k$  ehk  $g(t_i) = P_k(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, k$ . Olgu meil näiteks kolm sõlme  $x_i, x_{i-1}, x_{i-2}$ . Sel juhul saame  $f(s, y(s))$  jaoks ruutpolünoomi kujul

$$f(s, y(s)) \approx P_2(s) = \sum_{j=0}^2 f(x_{i-j}, y(x_{i-j})) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{s - x_{i-k}}{x_{i-j} - x_{i-k}}, \quad s \in [x_{i-2}, x_i].$$

Analoogiliselt eelnevaga saame kirjutada

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(s) ds = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds,$$

milles pärast interpoleeriva polünoomi kasutamist (arvestades, et jääkliikme oleme jätnud kõrvale) jõuame tulemuseni

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^2 f(x_{i-j}, y(x_{i-j})) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{s - x_{i-k}}{x_{i-j} - x_{i-k}} ds.$$

Siit näiteks

$$f_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(s - x_{i-1})(s - x_{i-2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})} ds = \frac{f_i}{2h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (s - x_{i-1})(s - x_{i-2}) ds = 23 f_i \frac{h}{12},$$

$$f_{i-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(s-x_i)(s-x_{i-2})}{(x_{i-1}-x_i)(x_{i-1}-x_{i-2})} ds = -\frac{f_{i-1}}{h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (s-x_i)(s-x_{i-2}) ds = -16 f_{i-1} \frac{h}{12},$$

$$f_{i-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(s-x_i)(s-x_{i-1})}{(x_{i-2}-x_i)(x_{i-2}-x_{i-1})} ds = \frac{f_{i-2}}{2h^2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (s-x_i)(s-x_{i-1}) ds = 5 f_{i-2} \frac{h}{12}.$$

Kokkuvõttes oleme tuletanud ühe Adamsi ilmutatud kolmandat järku valemi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2}), \quad i \geq 2.$$

Märgime, et antud juhul tuletasime ka ühe võimalikest kvadratuursummadest, mis ei kasuta kõiki sõlmi integreerimisloigu sees, vaid ka väljaspool integreerimisloiku:

$$\int_a^{a+h} g(s) ds \approx \frac{h}{12}(23 g(a) - 16 g(a-h) + 5 g(a-2h)), \quad a \in \mathbb{R}.$$

◇

### 5.3 Ilmutamata Adamsi valemid

Kui me kasutame võrrandis (5.5),

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, y(s)) ds \quad (5.8)$$

integraali  $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$  leidmisel  $(k+1)$  sõlmega kvadratuurvalemi asemel  $(k+2)$  sõlmega valemit, siis analoogiliselt asendades

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + h \sum_{j=-1}^k \beta_j f(x_{i-j}, y_{i-j}) \quad (5.9)$$

jõuame valemini

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h}(\beta_{-1} \mathbf{f}_{i+1} + \beta_0 \mathbf{f}_i + \cdots + \beta_k \mathbf{f}_{i-k}), \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{i}, \quad (5.10)$$

mida nimetatakse  $\beta_{-1} \neq 0$  korral **ilmutamata Adamsi valemiks** ehk Adamsi interpolatsioonivalemiks. Paneme tähele, et ilmutamata Adamsi valemis (5.10) esineb liige  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$  ehk tundmatu väärtus  $y_{i+1}$  esineb nii võrrandi vasakus kui paremas pooles. Seega  $y_{i+1}$  leidmiseks tuleb lahendada teatav võrrand kujul  $y_{i+1} = \Phi(y_{i+1})$ . Ilmutamata diferentsvalemite kasutatakse tavaliselt ilmutatud diferentsvalemite abil leitud lahendi lähisväärtuste täpsustamiseks ja täpsuse hindamiseks. Kuidas täpsemalt selliseid valemite praktikas kasutada ja milleks nad head on, seda vaatame juba tulevastes loengutes.



## 5.4 Üldised diferentsmeetodid

Märgime, et Adamsi valemid (5.5) ja (5.10) on erijuhuks üldisematele diferentsmeetoditele kujul

$$\alpha_{-1}\mathbf{y}_{i+1} + \alpha_0\mathbf{y}_i + \cdots + \alpha_k\mathbf{y}_{i-k} = \mathbf{h}(\beta_{-1}\mathbf{f}_{i+1} + \beta_0\mathbf{f}_i + \cdots + \beta_k\mathbf{f}_{i-k}), \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{i}, \quad (5.11)$$

kus Adamsi valemite korral  $\alpha_{-1} = 1$ ,  $\alpha_0 = -1$  ja  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ . Valemite (5.11) nimetatakse ilmutatud diferentsvalemiks, kui  $\beta_{-1} = 0$  ja  $\alpha_{-1} \neq 0$  ning ilmutamata diferentsvalemiks, kui  $\beta_{-1} \neq 0$ .

| Ilmutatud tugevalt stabiilsed valemid   | Algtabel   | Jääkliikme peaos                 |
|---|------------|----------------------------------|
| $y_{i+1} = y_i + hf_i$  | $i \geq 0$ | $\frac{1}{2}h^2y^{(2)}(x_i)$     |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1})$   | $i \geq 1$ | $\frac{5}{12}h^3y^{(3)}(x_i)$    |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$                                    | $i \geq 2$ | $\frac{3}{8}h^4y^{(4)}(x_i)$     |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3})$                        | $i \geq 3$ | $\frac{251}{720}h^5y^{(5)}(x_i)$ |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}(1901f_i - 2774f_{i-1} + 2616f_{i-2} - 1274f_{i-3} + 251f_{i-4})$ | $i \geq 4$ | $\frac{95}{288}h^6y^{(6)}(x_i)$  |
| Ilmutatud nõrgalt stabiilsed valemid  |            |                                  |
| $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$   | $i \geq 1$ | $\frac{1}{3}h^3y^{(3)}(x_i)$     |
| $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(7f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2})$                                    | $i \geq 2$ | $\frac{1}{3}h^4y^{(4)}(x_i)$     |
| $y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(8f_i - 5f_{i-1} + 4f_{i-2} - f_{i-3})$                         | $i \geq 3$ | $\frac{29}{90}h^5y^{(5)}(x_i)$   |
| Ilmutamata tugevalt stabiilsed valemid  |            |                                  |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i)$  | $i \geq 0$ | $-\frac{1}{12}h^3y^{(3)}(x_i)$   |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1})$                                       | $i \geq 1$ | $-\frac{1}{24}h^4y^{(4)}(x_i)$   |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1} + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2})$                           | $i \geq 2$ | $-\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(x_i)$ |
| $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720}(251f_{i+1} + 646f_i - 264f_{i-1} + 106f_{i-2} - 19f_{i-3})$      | $i \geq 3$ | $-\frac{3}{160}h^6y^{(6)}(x_i)$  |

Kõige olulisem, mis siit tabelist näha võib, on erinevus ilmutatud ja ilmutamata valemite jääkliikmete peaosades. Sama järku ilmutamata meetodites on vastavad kordajad keskmiselt kümme korda väiksemad, näiteks  $\frac{251}{720}h^5y^{(5)}(x_i)$  ja vastava ilmutamata skeemi jääkliikme peaos on  $-\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(x_i)$ . Sellepärast tasub ka ära ilmutamata meetodite kasutamine, olgugi et tuleb teha lisatööd võrrandi paremal pool oleva suu-

ruse  $y_{i+1}$  leidmisel. Viimast annab aga väga efektiivselt ära kasutada sammul tekkiva vea hindamisel ja selles mõttes mingit ressursi raiskamist ei toimu.

## 5.5 Ilmutamata diferentsvalemite kasutamine

Ilmutamata valemis

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \mathbf{h} (\beta_{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) + \beta_0\mathbf{f}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) + \cdots + \beta_k\mathbf{f}(\mathbf{x}_{i-k}, \mathbf{y}_{i-k})), \quad 0 \leq k \leq i, \quad (5.12)$$

asub tundmatu  $y_{i+1}$  võrrandi vasakus pooles kui ka paremas pooles, liikmes  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Praktikas sel juhul me ei hakka tundmatut  $y_{i+1}$  leidma võrrandi täpse lahendamise teel, vaid kasutame iteratsioonimeetodit.

1. Esiteks leiame algtabeli  $y_0, y_1, \dots, y_k$  ja nendele vastavad funktsiooni  $f$  väärtused  $f_0, f_1, \dots, f_k$ .
2. Teiseks leiame olemasoleva info põhjal mingi muu meetodiga  $y$  algväärtuse punktis  $x_{i+1}$ , tähistame selle  $y_{i+1}^0$ . Kuigi kasutatav meetod võib olla vabalt valitud, siis enamasti on otstarbekas kasutada sama järku ilmutatud valemit, kuna siis saab ilma suuremate lisaarvutusteta ära kasutada varem leitud väärtusi  $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-k}$  ja  $f_i, f_{i-1}, \dots, f_{i-k}$ .
3. Leitud alglähendi  $y_{i+1}^0$  abil arvutame funktsiooni  $f$  väärtuse  $f_{i+1}^0 := f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$ .
4. Saadud  $f$  väärtuse abil leiame ilmutamata valemi (5.12) abil uue  $y$  väärtuse punktis  $x_{i+1}$ , tähistame selle  $y_{i+1}^1$ .
5. Üldjuhul võimegi nüüd juba minna järgmise sammu  $y_{i+2}$  leidmise juurde, kuid kui me tahame, siis võime vähemalt paar korda oma iteratsiooni jätkata. Nimelt, võime leida  $f_{i+1}^1 := f(x_{i+1}, y_{i+1}^1)$  ja seejärel (5.12) abil  $y_{i+1}^2$  jne.
6. Võtame  $y$  lähisväärtuseks punktis  $x_{i+1}$  viimasena leitud suuruse  $y_{i+1}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Vaatleme lähemalt, mitu iteratsiooni  $y_{i+1}^n$  leidmiseks meil tegelikult vaja läheb. Kirjutame ilmutamata Adamsi valemi

$$y_{i+1} = y_i + h \beta_{-1} f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{i-j}$$

järgmisel kujul

$$\varphi(y) = y_i + h\beta_{-1}f(x_{i+1}, y) + h\sum_{j=0}^k \beta_j f_{i-j}.$$

Suurus  $y_{i+1}$  on võrrandi

$$y = \varphi(y)$$

lahend, millel leidmiseks kasutame iteratsioonimeetodit:

$$y_{i+1}^{n+1} = \varphi(y_{i+1}^n), \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.13)$$

Arvutusmeetodite kursuses (vt. [5]) näidatakse, et iteratsioonimeetod (5.13) koondub (s.t.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{i+1}^n = y_{i+1}$ , kus  $y_{i+1}$  on võrrandi  $y = \varphi(y)$  lahend), kui suurusi  $y_{i+1}$  ja  $y_{i+1}^n$  sisaldaval lõigul

$$|\varphi'(y)| \leq \delta < 1.$$

Seejuures koonduvuskiirust iseloomustab võrratus

$$|y_{i+1} - y_{i+1}^{n+1}| \leq \delta |y_{i+1} - y_{i+1}^n|.$$

Meie juhul

$$\varphi'(y) = h\beta_{-1}f_y(x_{i+1}, y)$$

ja

$$|\varphi'(y)| \leq M|\beta_{-1}|h,$$

kui vaadeldavas piirkonnas  $|f_y(x_{i+1}, y)| \leq M$ . Saame, et iteratsioonimeetod (5.13) koondub, kui

$$\delta = M|\beta_{-1}|h < 1.$$

See on samaväärne tingimusega

$$h < \frac{1}{M|\beta_{-1}|}.$$

**Märkus 5.1.** *Praktikas valitakse vajaliku täpsuse saavutamiseks samm  $h$  nii, et*

$$h \leq \frac{1}{20 M|\beta_{-1}|}.$$

*Siis iga järgmise lähendi viga on vähemalt 20 korda väiksem eelmise lähendi veast ja piisab praktiliselt ainult ühest iteratsioonisammust, sest iteratsiooniprotsessi jätkamisel on edasised täpsustused väiksemad ilmutamata valemi enda veast.*

## Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.
- [3] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.
- [4] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.
- [5] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1986.