Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

Sisukord

6 Prognoosi-korrektsiooni meetod. Määramata kordajate meetod

6.1 Prognoosi-korrektsiooni meetod, ligikaudne viga

Analoogiliselt Runge-Kutta veahindamise meetodile, saab ka diferentsmetodite korral leida ligikaudse vea. Siinjuures toimub ses diferentsmeetodite jaoks oluliselt väiksema arvutusaja kuluga.

Praktikas kasutatakse tihti ilmutatud ja ilmutamata valemeid paarikaupa üheskoos, kus esialgne alglähend y^0_{i+1} leitakse ilmutatud valemi abil ning seejärel täpsustatakse tulemust sama järku ilmutamata valemiga (tähistame tulemuse y_{i+1}). Sellist diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendamise meetodit nimetatakse kirjanduses **prognoosi- ja korrektsioonimeetodiks** (*Predictor Corrector Method*).

Oletame, et juba leitud lahendi y väärtused $y_0, \ldots, y_i$ on leitud täpselt (arvutatud piisava täpsusega). Siis sammul tekkiv viga võrdub valemi jääkliikmega. Kui me kasutame q-astme täpsusega ilmutatud ja ilmutamata diferentsvalemeid, siis

$$y(x_{i+1}) - y^0_{i+1} \approx \Theta^0 h^{q+1} y^{(q+1)}(x_i),$$

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} \approx \Theta h^{q+1} y^{(q+1)}(x_i),$$

kus Θ^0 ja Θ on vastavate valemite jääkliikmete peaosade kordajad. Lahutades need kaks võrrandit omavahel, saame

$$y_{i+1} - y^0_{i+1} \approx (\Theta^0 - \Theta) h^{q+1} y^{(q+1)}(x_i).$$

Leides viimasest seosest $h^{q+1}y^{(q+1)}(x_i)$ ligikaudse avaldise ning asendades selle ilmutamata valemi jääkliikmesse, saame

$$\boxed{y(x_{i+1}) - y_{i+1} \approx \frac{\Theta}{\Theta^0 - \Theta}\left(y_{i+1} - y^0_{i+1}\right)} \tag{6.1}$$

Analoogiliselt võime ka siin oma lähislahendit leitud vea abil täpsustada:

$$\boxed{y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} + \frac{\Theta}{\Theta^0 - \Theta}\left(y_{i+1} - y^0_{i+1}\right)} \tag{6.2}$$

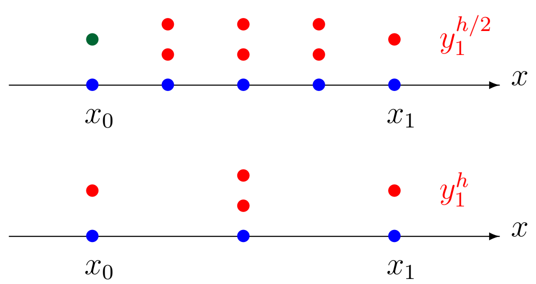
Toome mõned konkreetsed kordajate $\frac{\Theta}{\Theta^0-\Theta}$ väärtused Adamsi valemite jaoks:

$q=2$	$q=3$	$q=4$
$\frac{\Theta}{\Theta^0-\Theta} = -\frac{1}{6}$	$\frac{\Theta}{\Theta^0-\Theta} = -\frac{1}{10}$	$\frac{\Theta}{\Theta^0-\Theta} = -\frac{19}{270} \approx -\frac{1}{14}$

Märkus 6.1. *Jämedalt hinnates võib lugeda, et ilmutamata valemi abil leitud tulemuse viga võrdub ligikaudu* $1/10$ *ilmutatud ja ilmutamata valemite abil leitud tulmuste erinevusest ehk ilmutamata valemi kasutamine annab umbes ühe õige kümnendkoha juurde. Lihtsustades võib kasutada järgmist ligikaudse sammul tekkiva vea valemit*

$$\boxed{E_{i+1} = |y(x_{i+1}) - y^1_{i+1}| \approx \frac{1}{10}|y^1_{i+1} - y^0_{i+1}|.} \tag{6.3}$$

Märkus 6.2. *Kui me võrdleme arvutusaega Runge-Kutta 4-järku meetodiga, siis mäletatavasti tuli Runge Kutta meetodiga vea hindamise jaoks teha 11 funktsiooni f arvutust.*



Sammu h korral teeme neli f väätuse arvutamist ja sammu $h/2$ korral lisaks 3+4=7, kuna esimeses sõlmes x_0 kasutatakse ühist väärtust $f(x_0, y_0)$.

Diferentsmeetodiga tuleb teha ainult kaks funktsiooni f arvutust: esiteks ilmutatud skeemis $f(x_{i+1}, y^0_{i+1})$ ja seejärel ilmutamata valemiga leitud lähisväärtuse y^1_{i+1} abil tuleks täpsustada ka funktsiooni f väärtust $f(x_{i+1}, y^1_{i+1})$.

Märkus 6.3. *Kui mingil sammul selgub, et ligikaudne viga ei vasta meie soovidele, siis tuleb kasutada kas kõrgemat järku valemeid või muuta sammu pikkust. Küll aga on diferentsmeetodite juures see häda, et sammu muutmine on palju tülikam, kui Runge-Kutta meetodite korral. Diferentsmeetodid kasutavad informatsiooni eelmiste osalõikude kohta, kus oli kasutusel konkreetne sammu pikkus. Viimase muutmine mõjub ka nendele tulemustele. Runge-Kutta meetodid ei kasutanud mingit informatsiooni eelmiste osalõikude kohta ja sel korral oli väga lihtne sõltumatult muuta sammupikkust.*

Näiteks võib viimast küllaldase täpsusega lahendi väärtust $y(x_i) = y_i$ vaadelda kui uut algtingimust ning sellest lähtudes koostada Runge-Kutta meetodite abil sobiva tihedusega algtabeli, mille baasil saab jätkata arvutamist diferentsvalemite abil.

Näide 6.1. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1.$$

Võib vahetult kontrollida, et selle ülesande täpne lahend on

$$y(x) = x - 1 + 2e^{-x}.$$

Kasutame lõigul $[0, 2]$ teist järku prognoosi ja korrektsiooni meetodit, kus ilmutatud valemi rollis on skeem

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), \quad i \geq 1,$$

ja ilmutamata valemi rollis on ilmutamata trapetsmeetod

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f_{i+1} + f_i), \quad i \geq 0.$$

Kasutame sammu $h = 1$.

1. Leiame algtabeli täiustatud Euleri meetodiga $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(K_1 + K_2)$, mis oli teatavasti üks Runge-Kutta 2-järku meetoditest. Esiteks leiame

   $$K_1 = f(x_0, y_0) = 0 - 1 = -1,$$

   $$K_2 = f(x_0 + h, y_0 + h\,K_1) = (0 + 1) - (1 + 1 \cdot (-1)) = 1.$$

   Siit

   $$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) = 1 + \frac{1}{2}(-1 + 1) = 1.$$

2. Meie algtabel on hetkel kujul $y_0 = 0, y_1 = 1$. Arvutame f_1:

$$f_1 = f(1,1) = 1 - 1 = 0.$$

Saime, et funktsiooni f väärtuste jada on $f_0 = -1, f_1 = 0$.

3. Leiame ilmutatud valemiga y_2^0:

$$y_2^0 = y_1 + \frac{h}{2}(3f_1 - f_0) = 1 + \frac{1}{2}(3 \times 0 - (-1)) = \frac{3}{2}.$$

4. Nüüd saame arvutada funktsiooni f väärtuse f_2:

$$f_2 = f(x_2, y_2^0) = x_2 - y_2^0 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

5. Leiame ilmutamata valemiga y_2^1:

$$y_2^1 = y_1 + \frac{h}{2}(f_2 + f_1) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{5}{4}.$$

6. Leiame ligikaudse sammul tekkiva vea:

$$y(2) - y_2^1 \approx -\frac{1}{6}(y_2^1 - y_2^0) = -\frac{1}{6}\left(\frac{5}{4} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{24} = 0.042.$$

Tegelik viga on

$$y(2) - y_2^1 = 2 - 1 + 2e^{-2} - \frac{5}{4} \approx 0.021.$$

Kasutades täpsustust (6.1) saaksime

$$\tilde{y}_2^1 \approx y_2^1 - \frac{1}{6}(y_2^1 - y_2^0) = \frac{5}{4} + \frac{1}{24} = \frac{31}{24} \approx 1.29.$$

Sel juhul oleks tegelik viga

$$y(2) - \tilde{y}_2^1 = 2 - 1 + 2e^{-2} - \frac{31}{24} \approx -0.021.$$

Seega täpsustamisega me siin midagi ei võida, kuid ei kaota ka.

7. Oleme leidnud lahendi y lähisväärtuse punktis $x = 2$. Lõplikuks väärtuseks võime võtta $y(2) \approx y_2^1 = \frac{5}{4}$ või $y(2) \approx \tilde{y}_2^1 = \frac{31}{24}$.

8. Kui meil oleks vaja edasi arvutada, siis näiteks y_2^1 abil peaksime ümber arvutama funktsiooni f väärtuse punktis $x = 2$:

$$f_2 = f(x_2, y_2^1) = x_2 - y_2^1 = 2 - \frac{5}{4} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Tegelik väärtus $f(2, y(2)) \approx 0.729$ on palju lähedasem uuendatud väärtusele $f_2 = 0.75$ kui 4. sammul leitud esialgsele väärtusele 0.5.

9. Võime kokkuvõtteks välja kirjutada oma leitud suurused:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & x_1 &= 1, & x_2 &= 2, \\ y_0 &= 1, & y_1 &= 1, & y_2 &= \tfrac{5}{4}, \\ f_0 &= -1, & f_1 &= 0, & f_2 &= \tfrac{3}{4}. \end{aligned}$$

$\diamond$

6.2 Määramata kordajate meetod diferentsvalemite tuletamiseks

Käesolev peatükk on kirjutatud konspekti [1] põhjal. Adamsi valemid on erijuhuks üldisematele diferentsmeetoditele kujul

$$\alpha_{-1} y_{i+1} + \alpha_0 y_i + \cdots + \alpha_k y_{i-k} = h\,(\,\beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \cdots + \beta_k f_{i-k}\,), \quad 0 \le k \le i, \tag{6.4}$$

kus Adamsi valemite korral $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_0 = -1$ ja $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Kuna ülesande $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ lahendi $y(x)$ korral $y'(x_{i-j}) = f(x_{i-j}, y(x_{i-j}))$, siis kujutab valem (6.4) endast ligikaudset seost funktsiooni $y(x)$ väärtuste $y(x_{i-j})$ ja selle tuletise väärtuste $y'(x_{i-j})$vahel. Olgu E_i valemi (6.4) vasaku ja parema poole vahe ülesande $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ lahendi $y(x)$ korral:

$$E_i = \sum_{j=-1}^{k} \alpha_j y(x_{i-j}) - h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j y'(x_{i-j}), \quad i \ge k \ge 0. \tag{6.5}$$

Suurust E_i nimetatakse valemi (6.4) jääkliikmeks.

Definitsioon 6.1. Valemit (6.4) nimetatakse q-astme täpsusega diferentsvalemiks, kui küllaldane arv kordi diferentseeruva ülesande $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ lahendi $y(x)$ korral $E_i = \Theta\, h^{q+1}$, kus Θ on tõkestatud suurus, kui $h \to 0$.

Valemi (6.4) kordajate α_j ja β_j leidmiseks saame võrrandid järgmisel teel. Arendame $y(x)$ ja $y'(x)$ Taylori ritta kohal x_i ja kirjutame Taylori rea välja kohal $x = x_{i-j}$. Arvestades seost

$$x_{i-j} = x_i - j\,h \Rightarrow x_{i-j} - x_i = -j\,h,$$

saame

$$y(x_{i-j}) = y(x_i) - jh\,y'(x_i) + \frac{(-jh)^2}{2!} y''(x_i) + \cdots + \frac{(-jh)^n}{n!} y^{(n)}(x_i) + \ldots,$$

$$y'(x_{i-j}) = y'(x_i) - jh\, y''(x_i) + \cdots + \frac{(-jh)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n)}(x_i) + \dots .$$

Asendades need read jääkliikme (6.5) avaldisse, saame

$$\begin{aligned} E_i &= \sum_{j=-1}^{k} [\alpha_j y(x_{i-j}) - h\beta_j y'(x_{i-j})] \\ &= \sum_{j=-1}^{k} \Big[\alpha_j y(x_i) - h\, y'(x_i)(j\alpha_j + \beta_j) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i)(j^2\alpha_j + 2j\beta_j) \\ &\quad + \cdots + \frac{(-h)^n}{n!} y^{(n)}(x_i)(j^n\alpha_j + nj^{n-1}\beta_j) + \dots \Big], \quad i \geq k \geq 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Nõuame, et viimases summas suuruste $y(x_i), h\, y'(x_i), \dots, \frac{h^q}{q!} y^{(q)}(x_i)$ kordajad võrduksid nulliga,

$$\sum_{j=-1}^{k} \alpha_j = 0, \tag{6.7}$$

$$\sum_{j=-1}^{k} (j^n\alpha_j + nj^{n-1}\beta_j) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, q, \quad 0^0 := 1. \tag{6.8}$$

Me näeme, et kui

$$\gamma = \frac{(-1)^{q+1}}{(q+1)!} \sum_{j=-1}^{k} (j^{q+1}\alpha_j + (q+1)j^q\beta_j) \neq 0, \tag{6.9}$$

siis (6.4) on q-astme täpsusega diferentsvalem, mille jääkliikme peaosaks on $\gamma h^{q+1} y^{(q+1)}(x_i)$:

$$E_i \approx \gamma\, h^{q+1} y^{(q+1)}(x_i), \quad i \geq k \geq 0. \tag{6.10}$$

Kui jääkliikme peaosa kordaja $\gamma = 0$, siis on valemi (6.4) täpsusaste suurem kui q (sel korral jääkliikme peaosa leidmiseks suurendame indeksit q nii kaua, kuni saame nullist erineva suuruse γ).

Diferentsvalemi (6.4) kordajad α_j, β_j, $j = -1, 0, \dots, k$, leitakse seega lineaarsest võrrandisüsteemist (6.7)-(6.8). Et see on homogeenne süsteem, siis saab ühe nullist erineva kordaja vabalt ette anda (võib näiteks võtta $\alpha_{-1} = 1$). Sageli antakse ette ka mõned teised kordajad ning ülejäänud leitakse võrrandisüsteemist (6.7)-(6.8), valides q nii, et võrrandite arv võrdub määratavate kordajate arvuga.

Adamsi valemite korral võtame $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Siis on rahuldatud võrrand (6.7) ning süsteemi ülejäänud võrranditel (6.8) on kuju (miks?)

$$\sum_{j=-1}^{k} j^{n-1}\beta_j = \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n = 1, 2, \dots, q. \tag{6.11}$$

Suuruse γ avaldises (6.9) saab lihtsustada kujule

$$\gamma = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \sum_{j=-1}^{k} j^q \beta_j. \tag{6.12}$$

Ilmutatud Adamsi valemite tuletamisel anname veel ette kordaja $\beta_{-1} = 0$ ning leiame ülejäänud kordajad $\beta_0, \ldots, \beta_k$ võrrandisüsteemist (6.11) nii, et saaksime võimalikult kõrge täpsusastmega diferentsvalemi. Ilmutamata Adamsi valemid saame, kui leiame kõik kordajad β_j võrrandisüsteemist (6.11) nii, et saaksime võimalikult kõrge täpsusastmega valemi.

Näide 6.2. Tuletame teise täpsusastmega Adamsi ilmutatud diferentsvalemi kujul

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f_i - f_{i-1}), \quad i \geq 1,$$

mille jääkliikme peaosaks on $\frac{5}{12}h^3y^{(3)}(x_i)$.

Lähtume seosest (6.4), võttes $k = 1$ ja $q = 2$. Kuna antud juhul $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$ ja $\beta_{-1} = 0$, siis

$$\sum_{j=-1}^{1} \alpha_j = 1 - 1 + 0 = 0,$$

$$y_{i+1} - y_i = h(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1})$$

ja võrrandisüsteem (6.11) suuruste β_0 ja β_1 leidmiseks võtab kuju

$$\left\{ \begin{array}{rl} \beta_0 + \beta_1 & = 1 \\ \beta_1 & = -\frac{1}{2} \end{array} \right\}.$$

Sellest nähtub, et $\beta_0 = 3/2$ ja $\beta_1 = -1/2$. Seose (6.12) abil arvutame jääkliikme peaosa kordaja

$$\gamma = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\beta_1 = \frac{5}{12}.$$

Seosest (6.10) järeldub nüüd, et $E_i \approx \frac{5}{12}h^3y^{(3)}(x_i)$. $\diamond$

Näide 6.3. Tuletame kolmanda täpsusastmega Adamsi ilmutamata diferentsvalemi kujul

$$y_{i+1} = y_i + h(\beta_{-1}f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1}), \quad i \geq 1,$$

ja kirjutame välja saadud valemi jääkliikme peaosa.

Siin $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 0$. Võttes $k = 1$ ja $q = 3$, kirjutame välja võrrandisüsteemi (6.11):

$$\left\{\begin{array}{rcccll} \beta_{-1} & + & \beta_0 & + & \beta_1 & = 1 \\ -\beta_{-1} & + & & & \beta_1 & = -\frac{1}{2} \\ \beta_{-1} & + & & & \beta_1 & = \frac{1}{3} \end{array}\right\}.$$

Sellest nähtub, et $\beta_{-1} = 5/12$, $\beta_0 = 2/3$ ja $\beta_1 = -1/12$. Seose (6.12) abil arvutame jääkliikme peaosa kordaja

$$\gamma = \frac{1}{24} + \frac{1}{6}(-\beta_{-1} + \beta_1) = -\frac{1}{24}.$$

Seosest (6.10) järeldub nüüd, et $E_i \approx -\frac{1}{24}h^4 y^{(4)}(x_i)$. Kirjutame välja ka oma kolmanda täpsusastmega valemi:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}), \quad i \geq 1.$$

$\diamond$

Näide 6.4. Moodustame maksimaalse täpsusastmega ilmutatud diferentsvalemi kujul

$$y_{i+1} + \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} = h(\beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1}), \quad i \geq 1.$$

Siin $\alpha_{-1} = 1$ ja $\beta_{-1} = 0$, ülejäänud kordajate leidmiseks kirjutame välja võrrandisüsteemi (6.8) $q = 3$ korral:

$$\left\{\begin{array}{rcccccccll} 1 & + & \alpha_0 & + & \alpha_1 & & & & & = 0 \\ -1 & & & + & \alpha_1 & + & \beta_0 & + & \beta_1 & = 0 \\ 1 & & & + & \alpha_1 & + & & & 2\beta_1 & = 0 \\ -1 & & & + & \alpha_1 & + & & & 3\beta_1 & = 0 \end{array}\right\}.$$

Selle lahendamise teel saame

$$\alpha_0 = 4, \quad \alpha_1 = -5, \quad \beta_0 = 4, \quad \beta_1 = 2.$$

Valemi (6.9) abil arvutame jääkliikme peaosa kordaja

$$\gamma = \frac{1}{4!}(1 + \alpha_1 + 4\beta_1) = \frac{1}{6}.$$

Seega oleme tuletanud kolmanda täpsusastmega diferentsvalemi

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + h(4f_i + 2f_{i-1}), \quad i \geq 1,$$

mille jääkliige

$$E_i \approx \frac{1}{6}h^4 y^{(4)}(x_i).$$

$\diamond$

Märgime, et viimane valem on küll kõrgema täpsusastmega kui esimeses näites saadud ilmutatud Adamsi valem, kuid praktilisel arvutamisel ta end ei õigusta, sest osutub mittestabiilseks (näitame järgmistes loengutes). Võimalikud ümardamisvead algtabelis või arvutustulemustes rikuvad teatava arvu sammude järel ära arvutatavad suurused y_{i+1}.

Viited

[1] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.

[2] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.