Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

7 Lineaarsed diferentsvõrrandid

Sisukord

Diferentsmeetodite arvutuseeskirjad kujutavad endast teatavaid rekurrentseid seoseid diferentsiaalvõrrandi lahendi lähisväärtuste leidmiseks. Neid seoseid nimetatakse sageli diferentsvõrranditeks.

7.1 Diferentsvõrrandi mõiste

Olgu k mittenegatiivne täisarv.

Definitsioon 7.1. Seost kujul

$$\boxed{\alpha_k\, y_{i+k} + \alpha_{k-1}\, y_{i+k-1} + \cdots + \alpha_0\, y_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots,} \tag{7.1}$$

kus kordajad $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_0$ on antud funktsioonid täisarvulistest argumentidest i, nimetatakse k-järku lineaarseks homogeenseks diferentsvõrrandiks ehk rekurrentseks võrrandiks muutujate $y_0, y_1, \ldots$ suhtes.

Järgnevas oletame, et

$$\alpha_k \neq 0, \quad \alpha_0 \neq 0.$$

Definitsioon 7.2. Diferentsvõrrandi (7.1) lahendiks nimetatakse jada $y_0, y_1, \ldots,$ mis rahuldab võrrandit (7.1), s.t. suuruste $y_0, y_1, \ldots$ asetamisel võrrandisse (7.1) saame samasuse.

Näide 7.1. Diferentsvõrrandi

$$y_{i+1} - 2y_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{7.2}$$

lahendiks on jada $y_i = 2^i$, $i = 0, 1, \ldots,$ sest

$$2^{i+1} - 2\,2^i \equiv 0.$$

Tegelikult on diferentsvõrrandil (7.2) lõpmata palju lahendeid, sest näiteks iga jada $y_i = C\,2^i$ korral kehtib

$$C2^{i+1} - 2\,C2^i \equiv 0,$$

kus C on mingi suvaline konstant. $\diamond$

Näide 7.2. Diferentsvõrrandi

$$y_{i+1} - (i+1)y_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{7.3}$$

lahendiks on jada $y_i = C \cdot i!$, $i = 0, 1, \ldots,$ sest

$$C \cdot (i+1)! - (i+1)C \cdot i! \equiv 0,$$

kus C on mingi suvaline konstant. $\diamond$

Märkus 7.1. *Diferentsvõrrandi* (7.1) *lahend pole üheselt määratud. Me võime suvaliselt ette anda otsitava jada* $\{y_i\}$ k *esimest liiget* $y_0, y_1, \ldots, y_{k-1}$ *ning arvutada seejärel seose*

$$y_{k+i} = -\frac{1}{\alpha_k}(\alpha_{k-1}y_{i+k-1} + \cdots + \alpha_0 y_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

abil samm-sammult jada $\{y_i\}$ *järgnevad liikmed.*

Seega otsitava jada k esimese liikme väärtused (nn. algtingimused) määravad üheselt vaadeldava diferentsvõrrandi lahendi (nn. erilahendi). Sageli on aga vaja leida analüütiline avaldis otsitava jada üldliikmele, millist probleemi me järgnevas lähemalt vaatlemegi.

7.2 Lineaarse homogeense diferentsvõrrandi üldahend

Olgu $\{y_i^{\{1\}}\}$, $\{y_i^{\{2\}}\}$, ... , $\{y_i^{\{k\}}\}$ diferentsvõrrandi (7.1) mingid erilahendid. Siis jada $\{y_i\}$, kus

$$y_i = C_1 y_i^{\{1\}} + C_2 y_i^{\{2\}} + \cdots + C_k y_i^{\{k\}}, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{7.4}$$

on suvaliste konstantide $C_1, C_2, \ldots, C_k$ korral võrrandi (7.1) lahendiks.

Meid huvitab küsimus, mis tingimustel diferentsvõrrandi (7.1) iga lahendit saab esitada kujul (7.4) ehk millal avaldis (7.4) kujutab võrrandi (7.1) üldlahendit.

Olgu $y_0^*, y_1^*, \ldots$ võrrandi (7.1) suvaline lahend. See lahend on oma algtingimustega $y_0^*, y_1^*, \ldots, y_{k-1}^*$ üheselt määratud. Püüame leida konstandid $C_1, \ldots, C_k$ nii, et seos (7.4) annaks parajasti meie lahendi $y_0^*, y_1^*, \ldots$. Siis peab kehtima võrrand

$$y_i^* = C_1 y_i^{\{1\}} + C_2 y_i^{\{2\}} + \cdots + C_k y_i^{\{k\}}, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{7.5}$$

Saime k konstandi $C_1, \ldots, C_k$ leidmiseks k lineaarsest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi, mis on üheselt lahenduv parajasti siis, kui vastav süsteemi determinant D erineb nullist:

$$D \equiv \begin{vmatrix} y_0^{\{1\}} & y_0^{\{2\}} & \ldots & y_0^{\{k\}} \\ y_1^{\{1\}} & y_1^{\{2\}} & \ldots & y_1^{\{k\}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k-1}^{\{1\}} & y_{k-1}^{\{2\}} & \ldots & y_{k-1}^{\{k\}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{7.6}$$

Viimase tingimuse täidetuse korral nimetatakse võrrandi (7.1) erilahendeid $\{y_i^{\{1\}}\}$, $\{y_i^{\{2\}}\}$, ... , $\{y_i^{\{k\}}\}$ lineaarselt sõltumatuteks. Võtame tulemuse kokku järgmise teoreemina:

Teoreem 7.1. *Kui $\{y_i^{\{1\}}\}$, $\{y_i^{\{2\}}\}$, ... , $\{y_i^{\{k\}}\}$ on lineaarse homogeense diferentsvõrrandi (7.1) k lineaarselt sõltumatut erilahendit, siis võrrandi (7.1) üldlahendiks on jada $y_0, y_1, \ldots,$ kus y_i avaldub kujul (7.4), milles $C_1, \ldots, C_k$ on suvalised konstandid.*

7.3 Konstantsete kordajatega lineaarsed homogeensed diferentsvõrrandid

Järgnevalt vaatleme praktikas sageli esinevat erijuhtu, mil diferentsvõrrandi (7.1) kordajad $\alpha_k, \alpha_{k-1} \ldots, \alpha_0$ ei sõltu indeksist i. Sellisel juhul otsime võrrandi (7.1) erilahendeid $\{y_i\}$ eksponentfunktsiooni kujul:

$$y_i = \mu^i, \quad i = 0, 1, \ldots, \tag{7.7}$$

kus μ on mingi konstant. Asendades need avaldised võrrandisse (7.1) saame

$$\mu^i(\alpha_k\mu^k + \alpha_{k-1}\mu^{k-1} + \cdots + \alpha_0\mu^0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Seega jada kujul $\{y_i = \mu^i\}$ on võrrandi (7.1) lahendiks, kui μ rahuldab võrrandit

$$\alpha_k\mu^k + \alpha_{k-1}\mu^{k-1} + \cdots + \alpha_0 = 0. \tag{7.8}$$

Definitsioon 7.3. Võrrandit (7.8) nimetatakse diferentsvõrrandi (7.1) karakteristlikuks võrrandiks ja vastavaid lahendeid μ karakteristlikeks väärtusteks.

Märkus 7.2. *Lineaaralgebra kursuses näidatakse, et igal reaalarvuliste kordajatega k-järku algebralisel võrrandil* (7.8) *on parajasti k lahendit $\mu_1, \ldots, \mu_k$, mille seas võib olla kordseid (omavahel võrdseid väärtusi) ning nad võivad olla nii reaal- kui kompleksarvud.*

Märkus 7.3. *Märgime, et meid huvitavad vaid karakteristliku võrrandi* (7.8) *mittetriviaalsed (nullist erinevad) lahendid, sest $\mu = 0$ korral saame diferentsvõrrandi* (7.1) *triviaalse lahendi $y_0 = 0, y_1 = 0, \ldots$.*

7.4 Karakteristliku võrrandi ühekordsed lahendid

Vaatleme kõigepealt juhtu, millal karakteristlikul võrrandil (7.8) on k nullist erinevat lahendit $\mu_1, \ldots, \mu_k$ Siis saame diferentsvõrrandi (7.1) jaoks k erilahendit $\{y_i^{\{1\}}\}$, $\{y_i^{\{2\}}\}$, ... , $\{y_i^{\{k\}}\}$, kus

$$y_i^{\{m\}} = \mu_m^i, \quad i = 0, 1, \ldots; m = 1, 2, \ldots, k.$$

Saadud lahendid on ühtlasi lineaarselt sõltumatud, sest nende korral determinant D, (7.6) , omab kuju

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_k \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{k-1} & \mu_2^{k-1} & \ldots & \mu_k^{k-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Näeme, et D on Vandermonde'i determinant, mis (vt. nt. [4], lk 90) avaldub kujul

$$D = \prod_{p>q} (\mu_p - \mu_q)$$

ning seega ei võrdu nulliga. Teoreemist 7.1 järeldub nüüd järgmine tulemus.

Teoreem 7.2. *Olgu $\mu_1, \ldots, \mu_k$ diferentsvõrrandi (7.1) paarikaupa erinevad mittetriviaalsed karakteristlikud väärtused. Siis diferentsvõrrandi (7.1) üldlahend avaldub kujul $\{y_i\}$, kus*

$$\boxed{y_i = C_1\,\mu_1^i + C_2\,\mu_2^i + \cdots + C_k\,\mu_k^i, \quad i = 0, 1, \ldots} \tag{7.9}$$

ning $C_1, \ldots, C_k$ on suvalised konstandid.

Näide 7.3. Leida diferentsvõrrandi

$$y_{i+2} - 4y_i = 0, \quad i = 0, 1, ...$$

üldlahend ning erilahend, mis rahuldab algtingimusi

$$y_0 = 1, \quad y_1 = -1.$$

Kirjutame välja vastava karakteristliku võrrandi

$$\mu^2 - 4 = 0.$$

Leiame karakteristliku võrrandi lahendid:

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = -2.$$

Seega vaadeldava diferentsvõrrandi üldlahendiks on jada $y_0, y_1, \ldots,$ kus

$$y_i = C_1 2^i + C_2(-2)^i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

ning C_1, C_2 on suvalised konstandid.

Erilahendi leidmiseks võtame üldlahendi avaldises $i = 0$, $i = 1$ ning võrdsustame suuruse $C_1 2^i + C_2(-2)^i$ vastavad väärtused algtingimustest tulenevate väärtustega y_0, y_1. Tulemuseks on võrrandisüsteem kujul

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} C_1 & + & C_2 & = & 1, \\ 2C_1 & - & 2C_2 & = & -1, \end{array} \right.$$

mille lahendamisel saame

$$C_1 = \frac{1}{4}, \quad C_2 = \frac{3}{4}.$$

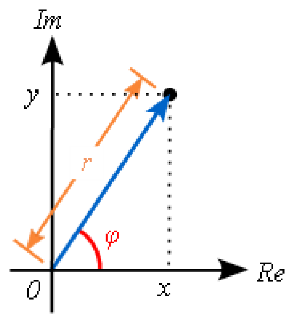
Järelikult otsitavaks erilahendiks kujuneb jada $y_0, y_1, \dots,$ kus

$$y_i = \frac{1}{4}2^i + \frac{3}{4}(-2)^i = \frac{2^i}{4}\Big[1 + 3(-1)^i\Big], \quad i = 0, 1, \dots.$$

$\diamond$

Märkus 7.4. *Edaspidi huvi pakkuvatel juhtudel on nii võrrandi* (7.1) *kordajad kui ka algtingimustes esinevad suurused reaalsed. Siis on kõik lahendi* $\{y_i\}$ *väärtused reaalsed, kuid mõni võrrandi* (7.1) *karakteristlik väärtus* μ_p *võib olla kompleksne. Koos kompleksarvuga* μ_p *on karakteristlikuks väärtuseks ka tema kaaskompleks* $\mu_q = \bar{\mu}_p$ *(algebralise võrrandi* (7.8) *kompleksed lahendid esinevad reaalsete kordajate* $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_0$ *korral alati kaaskompleksidena). Sellisel juhul esinevad üldlahendi avaldises* (7.9) *kompleksed suurused* μ_p^i *ja* μ_q^i*, kuid nendest on võimalik vabaneda järgmisel teel.*

Olgu kompleksarvu μ_p moodul r ja argument φ.



Siis

$$\mu_p = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$\mu_q = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Sel juhul kompleksarvude Euleri valemist järeldub

$$\mu_p^j = r^j(\cos j\varphi + i\sin j\varphi), \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$\mu_q^j = r^j(\cos j\varphi - i\sin j\varphi), \quad j = 0, 1, \dots.$$

Võrrandi (7.8) komplekslahendite paarile vastavat osa diferentsvõrrandi üldlahendist saame seega teisendada:

$$C_p\mu_p^j + C_q\mu_q^j = (C_p + C_q)r^j \cos j\varphi + i(C_p - C_q)r^j \sin j\varphi = A\, r^j \cos j\varphi + B\, r^j \sin j\varphi,$$

kus $A = C_p + C_q$ ja $B = i(C_p - C_q)$. Järelikult diferentsvõrrandi (7.1) komplekssete erilahendite paari $\{\mu_p^j\}$ ja $\{\mu_q^j\}$ võime üldlahendi (7.9) moodustamisel asendada reaalsete erilahenditega

$$\{r^j \cos j\varphi\}, \quad \{r^j \sin j\varphi\}, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Näide 7.4. Leida diferentsvõrrandi

$$y_{j+2} + 4y_j = 0, \quad j = 0, 1, ...$$

üldlahend reaalsete erilahendite kaudu.

Kirjutame välja vastava karakteristliku võrrandi

$$\mu^2 + 4 = 0.$$

Leiame karakteristliku võrrandi lahendid:

$$\mu_1 = 2i, \quad \mu_2 = -2i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Seega vaadeldava diferentsvõrrandi üldlahendiks on jada $y_0, y_1, \ldots,$ kus

$$y_i = C_1(2i)^j + C_2(-2i)^j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

ning C_1, C_2 on suvalised konstandid. Ülesandes nõuti aga üldlahendit reaalväärtustega erilahendite kaudu.

Reaalsete erialahendite jaoks kirjutame

$$(2i)^j = r^j\,(\cos(j\varphi) + \sin(j\varphi)) = 2^j \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right)\right), \qquad \text{kuna } r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$(-2i)^j = r^j\,(\cos(j\varphi) - \sin(j\varphi)) = 2^j \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right)\right), \qquad \text{kuna } r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Seega eelneva soovituse järgi

$$y_j = C_1(2i)^j + C_2(-2i)^j = A\, 2^j \cos\left(\frac{\pi}{2}j\right) + B\, 2^j \sin\left(\frac{\pi}{2}j\right),$$

kus konstandid $A = C_1 + C_2$ ja $B = i(C_1 - C_2)$. Märgime, et me saame alati tekitada esilagsete komplekssete konstantide C_1 ja C_2 abil reaalarvulised A ja B. Nimelt, võtame suvaliste reaalarvude a ja b korral

$$C_1 = \frac{a}{2} - i\frac{b}{2}, \quad C_2 = \frac{a}{2} + i\frac{b}{2}.$$

Siis konstantidele A ja B vastavatest seostest saame

$$A = C_1 + C_2 = a, \quad B = i(C_1 - C_2) = i(-i\,b) = b.$$

Seega võime oma üldlahendi välja kirjutada kujul

$$y_j = \tilde{C}_1\, 2^j \cos\left(\frac{\pi}{2} j\right) + \tilde{C}_2\, 2^j \sin\left(\frac{\pi}{2} j\right),$$

kus $\tilde{C}_1$ ja $\tilde{C}_2$ on suvalised reaalarvulised või kompleksed konstandid. $\diamond$

7.5 Karakteristliku võrrandi kordsed lahendid

Vaatleme nüüd veel juhtu, kus karakteristlikul võrrandil on kordseid lahendeid. Olgu näiteks μ_1 võrrandi (7.8) reaalarvuline n-kordne lahend ($n \in \mathbb{N}$; kui $n = 1$, siis μ_1 on ühekordne võrrandi (7.8) lahend). Märgime ilma tõestuseta, et sel korral on karakteristlikule väärtusele μ_1 vastavateks diferentsvõrrandi (7.1) lineaarselt sõltumatuteks erilahenditeks

$$\{\mu_1^j\}, \{j\,\mu_1^j\}, \ldots, \{j^{n-1}\,\mu_1^j\}, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Näide 7.5. Leida diferentsvõrrandi

$$y_{i+3} - 3y_{i+1} + 2y_i = 0, \quad i = 0, 1, ...$$

üldlahend ning erilahend, mis rahuldab algtingimusi

$$y_0 = 2, \quad y_1 = -2, \quad y_2 = 5.$$

Kirjutame välja vastava karakteristliku võrrandi

$$\mu^3 - 3\mu + 2 = 0.$$

Siin võib nüüd vahetult läbi näha, et üks karakteristlikest väärtustest on $\mu_1 = 1$. Jagame polünoomi $\mu^3 - 3\mu + 2$ läbi teguriga $\mu - 1$,

$$(\mu - 1)(\mu^2 + \mu - 2) = 0.$$

Leiame karakteristliku võrrandi lahendid:

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 1, \quad \mu_3 = -2.$$

Seega vaadeldava diferentsvõrrandi üldlahendiks on jada $y_0, y_1, \ldots,$ kus

$$y_i = C_1 + C_2\, i + C_3\,(-2)^i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

ning C_1, C_2, C_3 on suvalised konstandid.

Erilahendi leidmiseks võtame üldlahendi avaldises $i = 0$, $i = 1$ ja $i = 2$ ning võrdsustame suuruse $C_1{+}C_2 i{+}C_3(-2)^i$ vastavad väärtused algtingimustest tulenevate väärtustega y_0, y_1, y_2. Tulemuseks on võrrandisüsteem kujul

$$\begin{cases} C_1 & & & + & C_3 & = & 2, \\ C_1 & + & C_2 & - & 2C_3 & = & -2, \\ C_1 & + & 2C_2 & + & 4C_3 & = & 5, \end{cases}$$

mille lahendamisel saame

$$C_1 = \frac{7}{9}, \quad C_2 = -\frac{1}{3}, \quad C_3 = \frac{11}{9}.$$

Järelikult otsitavaks erilahendiks kujuneb jada $y_0, y_1, \ldots,$ kus

$$y_i = \frac{1}{9}\Big[7 - 3\,i + 11(-2)^i\Big], \quad i = 0, 1, \ldots.$$

$\diamond$

Märkus 7.5. *Kui kordne karakteristlik väärtus μ_1 on kompleksarv (s.t. $\mu_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$), siis analoogiliselt märkuses 7.4 esitatuga võime reaalsete $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_0$ korral suurustele μ_1 ja $\bar{\mu}_1$ vastavad võrrandi* (7.1) *erilahendid asendada reaalsete erilahenditega kujul*

$$\{r^j\,\cos j\varphi\}, \{r^j\,\sin j\varphi\}, \{j\,r^j{+}, \cos j\varphi\}, \{j\,r^j\,\sin j\varphi\}, \ldots$$
$$\ldots, \{j^{n-1}\,r^j\,\cos j\varphi\}, \{j^{n-1}\,r^j\,\sin j\varphi\}, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Seega pärast karakteristliku võrrandi (7.8) kõigi lahendite leidmist saame alati välja kirjutada konstantsete kordajatega lineaarse homogeense diferentsvõrrandi (7.1) üldlahendi kujul (7.4), milles vastavate erilahendite $\{y_i^{\{1\}}\}$, ... , $\{y_i^{\{k\}}\}$ komponendid $y_i^{\{1\}}, \ldots, y_i^{\{k\}}$, $i = 0, 1, \ldots,$ on reaalsed suurused.

Näide 7.6. Leida diferentsvõrrandi

$$y_{j+4} + 2y_{j+2} + y_j = 0, \quad j = 0, 1, ...$$

üldlahend reaalsete erilahendite kaudu.

Kirjutame välja vastava karakteristliku võrrandi

$$\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mu^2 + 1)^2 = 0.$$

Leiame karakteristliku võrrandi lahendid:

$$\mu_1 = \mu_2 = i, \quad \mu_3 = \mu_4 = -i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Saame, et kompleksarvude jaoks $r = 1$ ja $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Eelneva analüüsi järgi võime üldlahendi kirjutada kujul

$$y_j = \tilde{C}_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} j\right) + \tilde{C}_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} j\right) + \tilde{C}_3\, j \cos\left(\frac{\pi}{2} j\right) + \tilde{C}_4\, j \sin\left(\frac{\pi}{2} j\right),$$

kus $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3$ ja $\tilde{C}_4$ on suvalised reaalarvulised või komplekssed konstandid. $\diamond$

Viited

[1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.

[2] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.

[3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.

[4] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1986.