Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

8 Diferentsmeetodite stabiilsus

Sisukord

Senini oleme diferentsvalemite põhilise iseloomustajana kasutanud nende täpsusastet ning lugenud täpsemateks kõrgema täpsusastmega valemid. Kuid diferentsmeetodite sobivus diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks sõltub suurel määral ka teisest väga tähtsast näitajast, nn. stabiilsusest, mis iseloomustab ebatäpsuste levimist arvutusprotsessis.

8.1 Vigade levimine arvutustes

Järgnevalt uurime algtabeli vigade edasikandumist arvutusprotsessis mitte üldjuhul, vaid lihtsaima diferentsiaalvõrrandi

$$y' = 0$$

korral. Märgime, et selle võrrandi lahendiks on suvaline konstant $y = C$ ning algtingimust $y(x_0) = y_0$ rahuldavaks lahendiks on $y = y_0$.

Meid huvitab ülesande

$$y' = 0, \quad y(x_0) = y_0,$$

lahendi väärtustele $y(x_i)$ üldise diferentsvalemi

$$\alpha_{-1}y_{i+1} + \alpha_0 y_i + \cdots + \alpha_k y_{i-k} = h\,(\,\beta_{-1}f_{i+1} + \beta_0 f_i + \cdots + \beta_k f_{i-k}\,), \quad 0 \le k \le i, \tag{8.1}$$

abil arvutatud lähisväärtuste y_i vea

$$\varepsilon_i = y(x_i) - y_i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

käitumine. Vaadeldaval juhul $f(x_i, y_i) = 0$ ning seos (8.1) omandab kuju

$$\sum_{j=-1}^{k} \alpha_j y_{i-j} = 0, \quad 0 \le k \le i. \tag{8.2}$$

Viimase seose abil saab järk-järgult arvutada $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots$, kui $\alpha_{-1} \neq 0$ ja on teada algtabel, s.t. $k+1$ väärtust $y_0, y_1, \ldots, y_k$. Olgu algtabeli vead

$$\varepsilon_i = y(x_i) - y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

kusjuures vähemalt mõned neist erinegu nullist. Algtabeli vigade levimise uurimisel oletame, et arvutamine valemi (8.2) abil toimub täpselt. Et vaadeldaval juhul ka (miks?)

$$\sum_{j=-1}^{k} \alpha_j y(x_{i-j}) = 0, \quad 0 \le k \le i,$$

siis

$$\sum_{j=-1}^{k} \alpha_j \varepsilon_{i-j} = 0, \quad 0 \le k \le i,$$

ehk

$$\alpha_{-1}\varepsilon_{i+k+1} + \alpha_0 \varepsilon_{i+k} + \cdots + \alpha_k \varepsilon_i = 0, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{8.3}$$

Seega saime konstantsete kordajatega lineaarse homogeense $(k+1)$-järku diferentsvõrrandi. Selle üldlahendi leidmiseks moodustame karakteristliku võrrandi

$$\alpha_{-1}\mu^{k+1} + \alpha_0 \mu^k + \cdots + \alpha_k = 0. \tag{8.4}$$

Oletame esialgu, et viimase võrrandi kõik lahendid $\mu_1, \ldots, \mu_{k+1}$ on ühekordsed (s.t. nende hulgas pole omavahel võrdseid). Teoreemist 7.2 järeldub nüüd, et võrrandi (8.3) üldlahend avaldub kujul $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$, kus

$$\varepsilon_i = \sum_{p=1}^{k+1} C_p \mu_p^i, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{8.5}$$

Seoses (8.5) esinevad konstandid tuleb leida nii, et oleksid rahuldatud algtingimused, s.t. võrrandisüsteemist

$$\varepsilon_i = \sum_{p=1}^{k+1} C_p \mu_p^i, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

mis on üheselt lahenduv (miks?). Selle lahend $\{C_1, \ldots, C_{p+1}\}$ sõltub konkreetse diferentsmeetodi (8.1) korral ainult algtabeli vigadest ε_i, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Kui karakteristliku võrrandi (8.4) kõigi lahendite $\mu_1, \ldots, \mu_{k+1}$ korral

$$|\mu_p| \leq 1, \quad p = 1, 2, \ldots, k+1,$$

siis

$$|\varepsilon_i| \leq \sum_{p=1}^{k+1} |C_p||\mu_p|^i \leq \sum_{p=1}^{k+1} |C_p|, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

s.t. algtabeli vigadest põhjustatud mistahes y_i ebatäpsused ei ületa konstanti $\sum_{p=1}^{k+1} |C_p|$, mis sõltub ainult algtabeli vigadest ja diferentsmeetodi kordajatest $\{\alpha_i\}$. Sellisel juhul diferentsmeetodit nimetatakse **stabiilseks**.

Hoopis teistsuguse iseloomuga on vigade $\varepsilon_i = y(x) - y_i$, $i = 0, 1, \ldots$, levimine siis, kui võrrandi (8.4) mingi (vähemalt ühe) lahendi moodul on ühest suurem, näiteks $|\mu_1| > 1$. Siis μ_1^i hakkab i suurenemisel kasvama eksponentfunktsiooni kiirusega. Sama kiirusega hakkab suurenema ka vea ε_i absoluutväärtus (kui $C_1 \neq 0$). Seejuures vea kasvamine sõltub peamiselt sammude arvust (indeksist i) ning seetõttu sammu h vähendamine hakkab järjest kiiremini rikkuma tulemust (sammude arv kasvab). Selliseid diferentsmeetodeid nimetatakse **mittestabiilseteks**.

Kuidas on olukord stabiilsusega aga siis, kui karakteristlikul võrrandil (8.4) on kordseid lahendeid? Olgu näiteks μ_1 võrrandi (8.4) reaalne n-kordne lahend ($n > 1$), millele vastab võrrandi (8.3) üldlahendi osa

$$C_1\mu_1^i + C_2 i\mu_1^i + \cdots + C_n i^{n-1}\mu_1^i, \quad i = 0, 1, \ldots. \tag{8.6}$$

See avaldis jääb $|\mu_1| < 1$ korral tõkestatuks (isegi läheneb nullile, kui $i \to \infty$). Kui aga $|\mu_1| > 1$, siis (8.6) hakkab absoluutväärtuselt tõkestamatult kasvama. Esimesel juhul on diferentsmeetod stabiilne, teisel juhul mittestabiilne. Märgime, et $|\mu_1| = 1$ korral on vea kasvamine suhteliselt aeglasem (astmefunktsiooni kiirusega).

8.2 Diferentsmeetodite stabiilsus

Toodud arutlused on aluseks järgmisele definitsioonile.

Definitsioon 8.1. Diferentsmeetodit (8.1) nimetatakse stabiilseks, kui temale vastava karakteristliku võrrandi (8.4) ühegi lahendi moodul ei ületa ühte ning kordsete lahendite moodulid on ühest väiksemad. Kui need tingimused pole täidetud, siis meetodit (8.1) nimetatakse mittestabiilseks.

Märkus 8.1. *Paneme tähele, et diferentsmeetodi stabiilsus või mittestabiilsus sõltub ainult kordajatest $\alpha_{-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_k$. Esitatud stabiilsuse mõiste võttis kasutusele Rootsi matemaatik G. Dahlquist 1956. aastal töös "Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations". Seetõttu seda stabiilsust nimetatakse vahel ka stabiilsuseks Dahlquisti mõttes.*

Definitsioon 8.2. Stabiilset diferentsmeetodit (8.1) nimetatakse tugevalt stabiilseks, kui vastava karakteristliku võrrandi (8.4) lahend $\mu = 1$ on ainuke selline lahend, mille moodul $|\mu| = 1$. Vastasel korral nimetatakse stabiilset meetodit (8.1) nõrgalt stabiilseks.

Märkus 8.2. *Eespool näitasime, et mittestabiilsete diferentsmeetodite kasutamisel algtabeli ebatäpsused rikuvad teatava arvu sammude järel arvutustulemused isegi lihtsaima diferentsiaalvõrrandi $y' = 0$ lahendamisel. Stabiilsete meetodite korral aga algtabeli vead ei põhjusta ühegi lahendi lähisväärtuse y_i juures teatavast konstandist suuremat viga. Üsna lihtne on veenduda, et põhiliselt samasugune on ka teataval arvutusetapil tekkinud ebatäpsuste (näiteks ümardamisvigade) levimise iseloom, sest põhimõtteliselt võime mistahes sammu vaadelda lähtesammuna.*

Märkus 8.3. *Osutub, et põhiliselt sama iseloomuga on ebatäpsuste levimine ka diferentsmeetodi* (8.1) *kasutamisel üldise Cauchy ülesande* $\{y' = f(x, y), \quad y(x_0 = y_0)\}$ *lahendamiseks. Stabiilsete diferentsmeetodite korral põhjustavad väikesed ebatäpsused algtabelis või arvutustulemustes suhteliselt väikesi ebatäpsusi lähislahendi väärtustes. Mittestabiilsete diferentsmeetodite korral rikuvad aga ka väikesed ebatäpsused algtabelis või arvutustes teatava arvu sammude järel lahendi lähendi, mistõttu sellised meetodid ei ole sobivad diferentsiaalvõrrandite ligikaudseks lahendamiseks.*

Selgitame nüüd mõningate konkreetsete diferentsmeetodite stabiilsust.

Näide 8.1. Adamsi diferentsvalemite korral $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$ ning vastaval karakteristlikul võrrandil (8.4) on kuju

$$\mu^{k+1} - \mu^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^k(\mu - 1) = 0.$$

Sellel võrrandil on ühekordne lahend $\mu_1 = 1$ ja k-kordne lahend $\mu_2 = 0$. Järelikult nii ilmutatud kui ka ilmutamata Adamsi valemid viivad (tugevalt) stabiilsete diferentsmeetoditeni. $\diamond$

Näide 8.2. Vaatleme skeeme, mille korral $\alpha_{-1} = 1$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_0 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Karakteristlikul võrrandil (8.4) on kuju

$$\mu^{k+1} - \mu^{k-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^{k-1}(\mu + 1)(\mu - 1) = 0.$$

Sellel võrrandil on ühekordseteks lahenditeks $\mu_1 = 1$ ja $\mu_2 = -1$ ning $(k-1)$-kordseks lahendiks $\mu_3 = 0$. Seega vastavad diferentsmeetodid on (nõrgalt) stabiilsed. $\diamond$

Näide 8.3. Vaatleme ülesande Cauchy ülesande $\{y' = f(x, y), \quad y(x_0 = y_0)\}$ lahendi lähisväärtuste y_i leidmiseks diferentsmeetodeid kujul

$$y_{i+1} + \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} = h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f_{i-j}, \quad 0 \le k \le i, \tag{8.7}$$

kus h on etteantud samm ja $\alpha_0, \alpha_1, \beta_{-1}, \beta_0, \ldots, \beta_k$ on mingid konstandid. Selleks, et viimane valem annaks üldse mingi täpsuse, tuleb nõuda, et tema kordajad rahuldaksid vähemalt seost

$$1 + \alpha_0 + \alpha_1 = 0.$$

Siis $\alpha_0 = -(1 + \alpha_1)$ ning karakteristliku võrrandi

$$\mu^2 - (1 + \alpha_1)\mu + \alpha_1 = 0$$

lahenditeks on $\mu_1 = 1$ ja $\mu_2 = \alpha_1$. Järelikult on diferentsmeetod kujul

$$y_{i+1} = y_i + \alpha_1(y_i - y_{i-1}) + h \sum_{j=-1}^{k} \beta_j f_{i-j}, \quad 0 \le k \le i,$$

reaalsete kordajate $\alpha_0, \beta_{-1}, \beta_0, \ldots, \beta_k$ korral stabiilne parajasti siis, kui

$$-1 \le \alpha_1 < 1.$$

$\diamond$

Näide 8.4. Olgu meil vaja leida integraal

$$I = \int_{-1}^{1} s\, ds.$$

Antud juhul on väga lihtne näha, et integraal I võrdub nulliga, kuna tegemist on sümmetriliste rajadega ja integraalimärgi all on paaritu funktsioon (s.t. $f(x) = -f(-x)$).

Moodustame Cauchy ülesande

$$y' = x, \quad y(-1) = 0.$$

Selle Cauchy ülesande lahend y kohal 1 annab meile integraali väärtuse I, ehk $y(1) = 0$. Vaatleme eelmises näites toodud diferentsvalemeid erinevate α_1 korral.

Valime stabiilseks skeemiks (siin $\alpha_1 = 0$) meile tuntud ilmutatud valemi

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23\, f_i - 16\, f_{i-1} + 5\, f_{i-2}), \quad i \geq 2.$$

Eelmises näites nägime, et üheks karakteristliku võrrandi lahendiks oli 1, seega $\alpha_1 = 1$ tekitab meile kordse lahendi $\mu = 1$. Jättes ülejäänud konstandid samaks, saame ebastabiilse meetodi:

$$y_{i+1} = 2y_i - y_{i-1} + \frac{h}{12}(23\, f_i - 16\, f_{i-1} + 5\, f_{i-2}), \quad i \geq 2.$$

Meil oli tingimus, et skeem on stabiilne, kui $-1 \leq \alpha_1 < 1$. Võtamegi järgnevalt $\alpha_1 = 0.99 < 1$:

$$y_{i+1} = 1.99y_i - 0.99y_{i-1} + \frac{h}{12}(23\, f_i - 16\, f_{i-1} + 5\, f_{i-2}), \quad i \geq 2.$$

Järgnevas tabelis on toodud erinevate meetoditega leitud integraali I väärtused (kuna õige vastus on $I = 0$, saame teada meetodi absoluutse vea), kasutades erinevat osalõikude arvu N. Märgime, et algtabel y_0, y_1, y_2 on siin leitud Euleri meetodiga kasutades esimestes osalõikudes omakorda 64 osalõiku.

N	$\alpha_1 = 0$	$\alpha_1 = 0.99$	$\alpha_1 = 1$
4	-3.9×10^{-3}	-0.1	-0.1
8	-9.8×10^{-4}	-1.1	-1.1
16	-2.4×10^{-4}	-3.3	-3.6
32	-6.1×10^{-5}	-7.5	-8.5
64	-1.5×10^{-5}	-14.2	-19.4
128	-3.8×10^{-6}	-22.3	-40.7
256	-9.5×10^{-7}	-27.0	-83.4
512	-2.4×10^{-7}	-23.6	-1.7×10^{2}
1024	-6.0×10^{-8}	-15.4	-3.4×10^{2}
2048	-1.5×10^{-8}	-8.6	-6.8×10^{2}
4096	-3.7×10^{-9}	-4.6	-1.4×10^{3}
8192	-9.3×10^{-10}	-2.3	-2.7×10^{3}
16384	-2.3×10^{-10}	-1.2	-5.5×10^{3}

Näeme, et $\alpha_1 = 0.99$ korral hakkab meetod siiski väga suure osalõikude arvu N korral koonduma, samas kui $\alpha_1 = 1$ korral meetod selgelt hajub. $\diamond$

Näide 8.5. Vaatleme kolmanda täpsusastmega diferentsmeetodit

$$y_{i+1} = -4y_i + 5y_{i-1} + h(4f_i + 2f_{i-1}), \quad i \geq 1. \tag{8.8}$$

Vastav karakteristlik võrrand omab kuju

$$\mu^2 + 4\mu - 5\mu = 0.$$

Kuna selle võrrandi lahenditeks on $\mu_1 = 1, \mu_2 = -5$, siis diferentsmeetod (8.8) ei ole stabiilne. Tõepoolest, meetodile (8.8) vastava diferentsvõrrandi üldlahendis

$$\varepsilon_i = C_1 + C_2(-5)^i, \quad i = 0, 1, \ldots$$

kasvab teise liikme absoluutväärtus (seega ka $|\varepsilon_i| = |y(x_i) - y_i|$) erakordse kiirusega (kui $C_2 \neq 0$). Viimases veenab meid ka järgmine tabel:

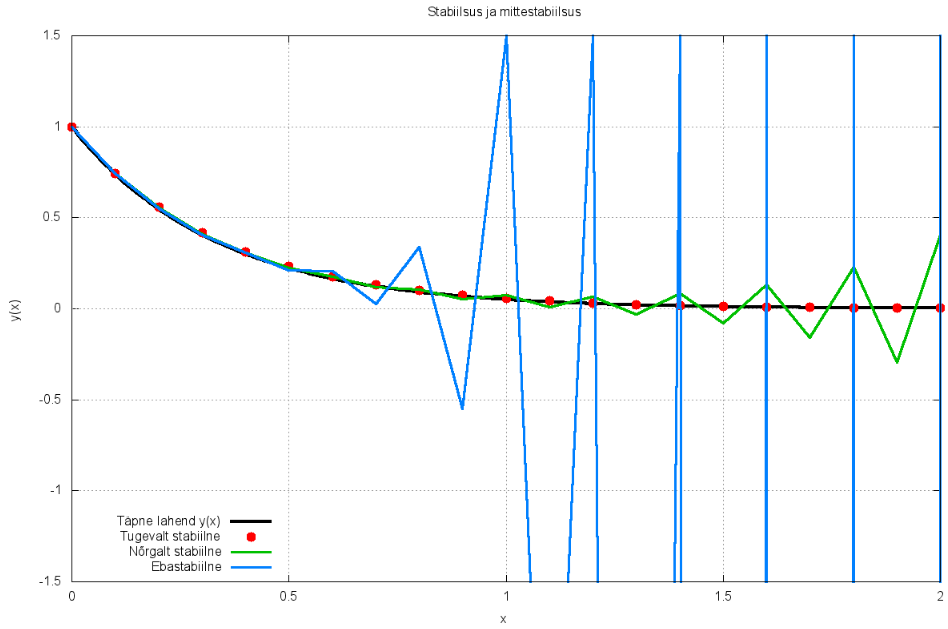
i	1	2	3	4	5	10	16
5^i	5	25	125	625	3 125	9 765 625	1.5×10^{11}

Näeme, et peale 5 sammu sooritamist võib algtabeli ebatäpsuste mõju olla nihkunud umbes 4 kümnendkoha võrra ettepoole, peale 10 ja 16 sammu sooritamist aga vastavalt umbes 7 ja 10 koha võrra ettepoole. Niisiis diferentsmeetod (8.8) (vaatamata oma suhteliselt kõrgele täpsusastmele) ei sobi praktiliseks arvutamiseks, sest ebatäpsused arvutustes rikuvad kiiresti lähislahendi. $\diamond$

Näide 8.6. Vaatleme algtingimusega ülesannet

$$y' = -3y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2],$$

mille täpseks lahendiks osutub $y(x) = e^{-3x}$. Rakendame sellele ülesandele kolme erinevat kahesammulist meetodit ($h = 0.1$) - tugevalt stabiilset (Adams-Bashforth'i meetod), nõrgalt stabiilset $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$ ja ebastabiilset skeemi $y_{i+1} = -y_i + 2y_{i-1} + h\left[\frac{5}{2}f_i + \frac{1}{2}f_{i-1}\right]$. Algtabeli jaoks y_1 leiame trapetsmeetodiga.



Näeme, et tugevalt stabiilne meetod koondub ilusasti lahendiks $y(x)$, nõrgalt stabiilne meetod hakkab arvutusvigade kuhjudes käituma halvasti ja ebastabiilne meetod ei koondu üldse. $\diamond$

8.3 Kommentaarid

Märkus 8.4. *Stabiilseteks osutuvad kõik vähemalt esimese astme täpsusega valemid kujul* (8.1), *milles kordajatest $\alpha_{-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_k$ ainult kaks erinevad nullist. Mittestabiilseid valemeid võime saada siis, kui valemi* (8.1) *kordajatest α_i kolm või enam erineb nullist.*

Märkus 8.5. *Valemis (5.1) nullist erinevate kordajate α_i arvu suurendamisel võiks üheks eesmärgiks seada valemi täpsusastme suurendamise. Kahjuks aga osutuvad eriti kõrge täpsusastmega diferentsvalemid mittestabiilseteks. Saab nimelt tõestada, et kõik valemid kujul* (8.1), *mille täpsusaste $q > k + 3$, on mittestabiilsed. Paarisarvulise k korral on mittestabiilsed isegi kõik valemid täpsusastmega $q > k + 2$.*

Märkus 8.6. *Eespool öeldu tõttu pole mõtet valemis* (8.1) *kõiki parameetreid $\alpha_{-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_k$ ja $\beta_{-1}, \beta_0, \ldots, \beta_k$ leida tingimusest, et saaksime maksimaalse täpsusastmega valemi. Praktikas pakuvad huvi madalama täpsusastmega stabiilsed valemid, milles mitte päris üheselt määratud kordajad leitakse näiteks tingimustest, et jääkliikme kordaja absoluutväärtus oleks võimalikult väike või ebatäpsuste edasikandumine oleks teatavas mõttes võimalikult soodne.*

Märkus 8.7. *Võiks seada eesmärgiks tuletada valemid kujul* (8.1)*, mille korral karakteristliku võrrandi kõigi lahendite moodulid* $|\mu_p| < 1$*,* $p = 1, 2, \ldots, k+1$*. Selliste valemite korral avaldaksid ebatäpsused järjest vähenevat mõju edasistele arvutustulemustele. Osutub aga, et selliseid mõistlikke diferentsvalemeid ei leidu. Nimelt, tarvilikust seosest*

$$\sum_{j=-1}^{k} \alpha_j = 0$$

järeldub, et karakteristliku võrrandi (8.4) *üheks lahendiks on* $\mu_1 = 1$ *(nii oli see ka kõigis eespool esitatud näidetes).*

Märkus 8.8. *Märgime veel, et stabiilsuse mõiste pole kujunenud põhiliseks mõisteks mitte ainult diferentsmeetodite teoorias. Seoses arvutustehnika arenguga, mis avab võimalusi mahukate arvutuste teostamiseks, on stabiilsuse mõiste omandanud olulise koha kogu arvutusmatemaatikas.*

Viited

[1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.

[2] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.

[3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.

[4] E. Tamme, L. Võhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1986.