Marek Kolk,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine,
Tartu Ülikool, 2012.

9 Sissejuhatus integraalvõrranditesse

Sisukord

Enne integraalvõrrandite juurde minemist, kordame üle mõned tuntud mõisted ja definitsioonid (vt. nt. [4]).

9.1 Määratud integraalid

Definitsioon 9.1. Funktsiooni F nimetatakse funktsiooni f algfunktsiooniks intervallis X, kui

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in X.$$

Näide 9.1. Näiteks, $F(x) = x + C$ on suvalise konstandi $C \in \mathbb{R}$ korral funktsiooni $f(x) = 1$ algfunktsioon lõigul $(-\infty, \infty)$, kuna $F'(x) = 1$ iga $x \in (-\infty, \infty)$ korral. Samuti on intervallis X funktsiooni $y'(x)$ algfunktsiooniks $F(x) = y(x) + C$, kuna $F'(x) = y'(x)$ iga $x \in X$ korral. Teisalt ei leidu algfunktsiooni katkeva funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

korral. Sellisele funktsioonile sobiks pidevaks algfunktsiooniks $F(x) = |x| + C$, aga kahjuks ei ole see funktsioon diferentseeruv punktis $x = 0$. $\diamond$

Olgu järgnevalt f mingis lõigus L määratud funktsioon, millel on selles lõigus algfunktsioon F, s.t. $F'(x) = f(x)$ iga $x \in L$ korral. Olgu a ja b selle lõigu suvalised punktid (võib olla ka näiteks $b < a$ või $b = a$).

Definitsioon 9.2. Arvu

$$F(b) - F(a)$$

nimetatakse funktsiooni f Newton-Leibnizi integraaliks rajades a-st b-ni ja tähistatakse

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lemma 9.1. *Newton-Leibnizi integraal on üheselt määratud.*

Olgu funktsioon f integreeruv lõigus L ja olgu a ja x mingid selle lõigu punktid.

Definitsioon 9.3. Funktsiooni

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \forall x \in L,$$

nimetatakse Newton-Leibnizi integraaliks ülemise raja funktsioonina.

Lemma 9.2. *[7] Üldine Leibnizi integraali reegel. Kui $f(x,y)$ ja $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ on pidevad ristkülikus $[a,b]\times[c,d]$, funktsioonid $\alpha(x)$ ja $\beta(x)$ aga diferentseeruvad lõigul $[a,b]$ ning nende muutumispiirkonnad kuuluvad lõiku $[c,d]$, siis kehtib valem*

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy = \beta'(x)f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy, \quad x \in [a,b]. \tag{9.1}$$

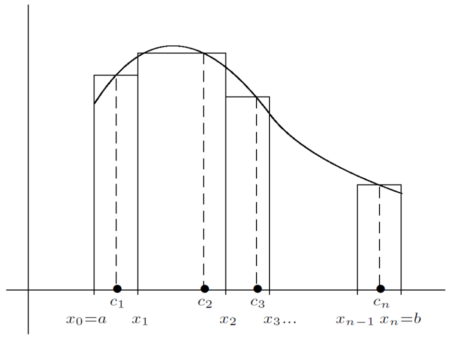
Järgnevalt tuletame meelde ka Riemanni integraali definitsiooni. Moodustame lõigus $[a,b]$ mingid sõlmed

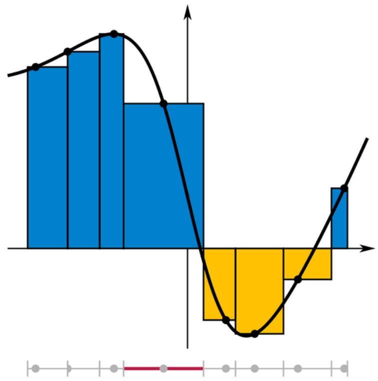
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$

Fikseerime igas osalõigus mingi punkti $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, N$. Sel juhul võib igas osalõigus $[x_{i-1}, x_i]$ moodustada ristkülikud kõrgusega $f(\xi_i)$ ja laiusega $h_i = x_i - x_{i-1}$. Sellise ristküliku pindala on alus korda kõrgus ehk $f(\xi_i)h_i$.

Arvutame kõigi nende ristkülikute summa

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)h_i.$$





Olgu h maksimaalse osalõigu pikkus ehk $h = \max_{i=1,\dots,N} h_i$.

Definitsioon 9.4. Öeldakse, et arv I on suuruse σ piirväärtus protsessis $h \to 0$, kui vastavalt suvalisele $\varepsilon > 0$ leidub selline $\delta > 0$, et alati, kui $h < \delta$, kehtib võrratus

$$|I - \sigma| < \varepsilon,$$

sõltumata lõigu $[a, b]$ jaotusviisist ja punktide ξ_i valikust osalõikudes $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$. Seda piirväärtust märgitakse

$$I = \lim_{h \to 0} \sigma.$$

Definitsioon 9.5. Piirväärtust $\lim_{h\to 0} \sigma$ nimetatakse funktsiooni f Riemanni integraaliks lõigus $[a, b]$ ja märgitakse sümboliga $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Funktsiooni $f(x)$, millel leidub Riemanni integraal lõigus $[a, b]$, nimetatakse integreeruvaks (Riemanni mõttes) selles lõigus.

Märgime, et lõigus $[a, b]$ Riemanni mõttes integreeruv funktsioon peab olema tõkestatud selles lõigus. Vastasel korral sisaldaks Riemanni summa mingit lõpmata suure pindalaga ristkülikut (või vähemalt määramata pindalaga ristkülikut).

Näide 9.2. Näiteks on eelnevalt vaadeldud katkev funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

lõplikul lõigul $[-b, b]$ integreeruv Riemanni mõttes (joonega eraldatud kujundi pindala on tõkestatud), kuid ei ole integreeruv Newton-Leibnizi mõttes (kuna ei leidu algfunktsiooni). Märgime, et funktsiooni integreerumiseks Newton-Leibnizi mõttes on tarvilik funktsiooni pidevus, aga Riemanni mõttes integreerumiseks see tarvilik ei ole. Samas leidub funktsioone, mis ei ole integreeruvad kummaski mõttes. Näiteks Diriclet' funktsioon (vt. nt. [1]):

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Diriclet' funktsioon on katkev igas punktis. $\diamond$

Teoreem 9.1. *Kui lõigus $[a, b]$ Riemanni mõttes integreeruval funktsioonil f on olemas algfunktsioon F selles lõigus, siis Riemanni ja Newton-Leibnizi määratud integraalid on võrdsed ehk kehtib Newton-Leibnizi valem*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dt = F(b) - F(a).$$

Lemma 9.3. *Lõigus $[a, b]$ pidev funktsioon on integreeruv selles lõigus nii Newton-Leibnizi kui ka Riemanni mõttes.*

9.2 Integraalvõrrandite põhitüübid

Antud alapunkti materjal pärineb konspektist [5].

Definitsioon 9.6. Integraalvõrrandiks nimetatakse võrrandit, milles otsitav funktsioon esineb integraali märgi all. Sõltuvalt sellest, kas otsitav funktsioon sisaldub võrrandis lineaarselt või mittelineaarselt, liigitatakse integraalvõrrandeid lineaarseteks ja mittelineaarseteks.

Küllaltki üldine lineaarne integraalvõrrand on esitatav kujul

$$g(t)y(t) - \lambda \int\limits_a^{\beta(x)} K(t,s)y(s)\,ds = f(t), \quad t \in [0, b]. \tag{9.2}$$

Siin kordaja $g(t)$, arvuline parameeter λ, integraali ülemine raja $\beta(t)$, tuum $K(t, s)$ ja vabaliige $f(t)$ on antud suurused ning y on otsitav funktsioon.

Definitsioon 9.7. Kui $f(t) \equiv 0$, siis nimetatakse võrrandit (9.2) homogeenseks, vastasel korral mittehomogeenseks.

Definitsioon 9.8. Võrrandi (9.2) lahendiks nimetatakse funktsiooni $y = \varphi(t)$, mis on määratud lõigul $[a, b]$ ja mille asetamisel võrrandisse (9.2) saame samasuse muutuja t suhtes. Sel korral öeldakse ka, et $y = \varphi(t)$ rahuldab võrrandit (9.2) lõigul $[a, b]$.

Enamasti oma kursuses otsime me lahendit $y(t)$, mis oleks pidev lõigus $[a, b]$. Erinevus diferentsiaalvõrranditega on selles, et ilma laiendatud tuletise mõisteta peab diferentsiaalvõrandite korral lahend olema vähemalt üks kord diferentseeruv, kõrgemat järku võrrandite korral rohkem kui üks kord diferentseeruv. Integraalvõrrandid lubavad meil lahendeid otsida ka laiemast funktsioonide hulgast. Praktikas esinevad integraalvõrrandid tihti diferentsiaalvõrranditega segamini koos võrrandite süsteemina.

Näide 9.3. Integraalvõrrandi

$$y(t) = \int_0^1 t\, s\, y(s)\, ds + e^t - t, \quad 0 \le t \le 1,$$

lahendiks on funktsioon $\varphi(t) = e^t$. Tõepoolest, asendades funktsiooni $\varphi(t)$ algse võrrandi paremasse poolde, saame

$$t \int_0^1 s\, e^s\, ds + e^t - t = te^s(s-1)\Big|_{s=0}^{s=1} + e^t - t = t + e^t - t = e^t.$$

Saime, et kui $y(t) = e^t$, siis võrrandi parem pool võrdub iga $t \in [0, 1]$ korral võrrandi vasaku poolega ja järelikult funktsioon $\varphi(t) = e^t$ on esialgse võrrandi lahend. $\diamond$

Näide 9.4. Integraalvõrrandi lahenditeks võivad olla ka näiteks pidevad funktsioonid, mis ei ole diferentseeruvad. Näiteks on integraalvõrrandi

$$y(t) = \int_{-1}^1 y(s)\, ds + |t| - 1, \quad t \in [-1, 1],$$

lahendiks funktsioon $y(t) = |t|$, mis on pidev lõigul $[-1, 1]$, kuid ei ole diferentseeruv punktis $t = 0$. Märgime, et antud juhul lahendi $y(t) = |t|$ jaoks leidub võrrandis olev integraal nii Newton-Leibnizi kui Riemanni mõttes, kuna $y(t)$ on pidev. Saame leida ka integraali $\int |t|\, dt = \frac{t|t|}{2} + C$. Viimane funktsioon on diferentseeruv puntkis 0, kuna

$$\left(\frac{t|t|}{2} + C\right)'\Bigg|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(0 + \Delta t)|0 + \Delta t| - 0|0|}{2\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta t|}{2} = 0.$$

$\diamond$

Definitsioon 9.9. Võrrandit kujul

$$y(t) = \lambda \int\limits_a^b K(t,s)\, y(s)\, ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{9.3}$$

nimetatakse Fredholmi II liiki lineaarseks integraalvõrrandiks. Siin λ on mingi konstant. Võrrandit kujul

$$y(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\, y(s)\, ds + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{9.4}$$

nimetatakse Volterra II liiki lineaarseks integraalvõrrandiks.

Kui võrrandis (9.2) funktsioon $g(t) = 0$ iga $t \in [a,b]$ korral, siis nimetatakse seda võrrandit I liiki võrrandiks. Fredholmi ja Volterra I liiki lineaarsed võrrandid on järgmised:

$$f(t) = \int\limits_a^b K(t,s)\, y(s)\, ds, \quad f(t) = \int\limits_a^t K(t,s)\, y(s)\, ds, \quad t \in [a,b].$$

Volterra tüüpi integraalvõrrandeid on uurinud itaalia matemaatik Vito Volterra (1860 - 1940) ning Fredholmi tüüpi võrrandeid rootsi matemaatik Erik Ivar Fredholm (1866 - 1927).

Paneme tähele, et Volterra võrrandeid võime vaadelda Fredholmi võrrandite sellise erijuhuna, kus tuum

$$\tilde{K}(t,s) = \begin{cases} K(t,s) & \text{kui } 0 \le s \le t \\ 0 & \text{kui } t < s \le b \end{cases}.$$

Üldjuhul on Volterra tüüpi võrrandeid lihtsam lahendada kui Fredholmi tüüpi võrrandeid.

Märgime lisaks, et II liiki integraalvõrrandite lahendamine on reeglina lihtsam ülesanne kui I liiki võrrandite lahendamine. See on tingitud asjaolust, et II liiki võrrandite lahendamine osutub tavaliselt korrektselt seatud ülesandeks, I liiki võrrandite lahendamine aga mittekorrektselt seatud ülesandeks ning I liiki võrrandile vajaliku täpsusega lähislahendi leidmiseks tuleb reeglina kasutada spetsiaalseid mittekorrektsete ülesannete lahendusmeetodeid. Järgnevates peatükkides käsitleme peamiselt vaid II liiki võrrandite lahendusmeetodeid.

Sageli esinevateks mittelineaarseteks integraalvõrranditeks on võrrandid kujul

$$y(t) = \int_a^b K(t,s,\, y(s))\, ds + f(t), \quad y(t) = \int_a^t K(t,s,\, y(s))\, ds + f(t), \quad t \in [a,b],$$

kus tuum $K(t,s,y)$ on mingi antud funktsioon kolmest muutujast t,s ja y, $f(t)$ on antud vabaliige ning $y(t)$ on otsitav. Sellist tüüpi Fredholmi võrrandit on põhjalikult uurinud vene matemaatik Pavel Samoilovits Urõson (1898 - 1924) ning seetõttu nimetatakse teda sageli Urõsoni integraalvõrrandiks. Urõsoni võrrandi tähtsaks erijuhuks on võrrand kujul

$$y(t) = \int_a^b K(t,s)\, F(y(s))\, ds + f(t), \quad t \in [a,b],$$

kus $f(t)$, $F(y)$ ja $K(t,s)$ on antud funktsioonid ning $y(t)$ on otsitav. Viimast mittelineaarset võrrandit nimetatakse seda uurinud saksa matemaatiku A. Hammersteini (1888 - 1941) järgi Hammersteini integraalvõrrandiks.

9.3 Integraalvõrrandite tekkimine

Üldjuhul võib praktikas ettetulavaid probleeme esitada samaväärsete diferentsiaal- või integraalvõrrandite abil. Iteratsioonimeetodite peatükis me näitasime I järku Cauchy ülesande ja Volterra tüüpi integraalvõrrandite samaväärsust, kui on täidetud teatavad tingimused. Tegelikult saab integraalvõrranditena esitada ka kõrgemat järku algtingimustega diferentsiaalvõrrandeid, samuti rajaülesandeid. Enne näidete juurde minekut, peame tutvustama ühte abivahendit, mille abil saab kahekordse integraali kirjutada ühekordsena.

Lemma 9.4. *[2] Olgu funktsioon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pidev. Siis kehtib seos*

$$\int_a^x \int_a^s f(t)\, dt\, ds = \int_a^x (x-t) f(t)\, dt, \quad x \in [a,b]. \tag{9.5}$$

Tõestus. Kuna f on pidev, siis Lemma 9.3 põhjal on ta ka integreeruv. Defineerime $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ seosega

$$F(x) = \int_a^x (x-t) f(t)\, dt, \quad x \in [a,b]. \tag{9.6}$$

Kuna $(x-t)f(t)$ ja $\frac{\partial}{\partial x}[(x-t)f(t)] = f(t)$ on pidevad iga x ja t korral lõigus $[a,b]$, siis võime kasutada Lemmat 9.2,

$$F'(x) = [(x-t)f(t)]_{t=x}\frac{d}{dx}x + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}[(x-t)f(t)]\,dt = \int\limits_a^x f(t)\,dt.$$

Kuna $f(x)$ ja $F'(x)$ on pidevad lõigul $[a,b]$ (tuletame meelde, et diferentseeruv funktsioon on pidev antud lõigul) ja Lemma 9.3 järgi ka integreeruvad. Teoreemi 9.1 põhjal saame kirjutada

$$F(s) = F(s) - F(a) = \int\limits_a^s F'(t)\,dt = \int\limits_a^s \int\limits_a^x f(t)\,dt\,dx.$$

Vahetades x ja s rollid, saamegi valemi (9.5). $\diamond$ $\square$

Näide 9.5. [2] Vaatleme II järku diferentsiaalvõrrandit

$$y''(x) + \lambda y(x) = g(x), \quad x \in [0,b], \tag{9.7}$$

kus λ on positiivne konstant ja g on pidev lõigul $[0,b]$. Kuna kõik tootud funktsioonid algses võrrandis on pidevad, siis võime võrrandi mõlemat poolt integreerida,

$$y'(x) - y'(0) + \lambda \int\limits_0^x y(t)\,dt = \int\limits_0^x g(t)\,dt.$$

Jällegi peame analüüsima funktsioonide pidevust. Kuna y'' peab eksisteerima iga lahendi y jaoks, siis ka vastavad funktsioonid on pidevad ja järelikult ka integreeruvad,

$$y(x) - y(0) - \int\limits_0^x y'(0)\,dx + \lambda \int\limits_0^x \int\limits_0^t y(s)\,ds\,dt = \int\limits_0^x \int\limits_0^t g(s)\,ds\,dt.$$

Kasutades Lemmat 9.4, saame Volterra tüüpi integraalvõrrandi

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^x (t-x)y(t)\,dt + y(0) + y'(0)x + \int\limits_0^x (x-t)g(t)\,dt. \tag{9.8}$$

Nüüd saab arvesse võtta kas siis algtingimusi või rajatingimusi. Vaatleme neid kahte eraldi võimalust järgmistes näidetes. $\diamond$

Näide 9.6. Olgu võrrandiga (9.7) koos antud algtingimused $y(0) = 0$ ja $y'(0) = A$. Siis me saame võrrandi (9.8) kirjutada kujul

$$y(x) = \int\limits_0^x K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \quad x \in [0,b],$$

kus tuum K on kujul

$$K(x,t) = \lambda(t-x)$$

ja vabaliige f on kujul

$$f(x) = Ax + \int\limits_0^x (x-t)g(t)\,dt.$$

Saadud võrrand on Volterra tüüpi integraalvõrrand. See on teist järku mittehomogeenne võrrand, kui A ja g on sellised, et $f(x)$ ei ole samaselt null. $\diamond$

Näide 9.7. Olgu võrrandiga (9.7) koos antud rajatingimused $y(0) = 0$ ja $y(b) = B$. Siis me saame võrrandi (9.8) välja kirjutada kohal $x = b$

$$y'(0) = \frac{1}{b}\left(\lambda \int\limits_0^b (b-t)y(t)\,dt - \int\limits_0^b (b-t)g(t)\,dt + B\right).$$

Asendame $y'(0)$ avaldise tagasi võrrandisse (9.8). Kasutades mingi funktsiooni $z(t)$ jaoks kirjutusviisi

$$\int\limits_0^b z(t)\,dt = \int\limits_0^x z(t)\,dt + \int\limits_x^b z(t)\,dt,$$

saame võrrandi (9.8) välja kirjutada järgmiselt:

$$y(x) = \lambda \int\limits_0^b K(x,t)y(t)\,dt + f(x), \quad x \in [0,b],$$

kus tuum K on kujul

$$K(x,t) = \begin{cases} \frac{t}{b}(b-x) & 0 \le t \le x \le b \\ \frac{x}{b}(b-t) & 0 \le x \le t \le b \end{cases}$$

ja vabaliige f on kujul

$$f(x) = \frac{Bx}{b} - \int\limits_0^b K(x,t)g(t)\,dt.$$

Saadud võrrand on Fredholmi tüüpi integraalvõrrand. See on teist järku mittehomogeenne võrrand, kui B ja g on sellised, et $f(x)$ ei ole samaselt null. $\diamond$

Näide 9.8. Vaatleme integraalvõrrandit

$$y(t) = \int\limits_0^1 t\,s\,y(s)\,ds + e^t - t, \quad 0 \le t \le 1.$$

Me soovime seekord toimida vastupidi: muuta integraalvõrrand algtinimgustega ülesandeks. Nagu me nägime, on selle võrrandi lahend $y(t) = e^t$, mis on lõptmata arv kordi diferentseeruv lõigus $[0, 1]$. Kuna ka $K(t, s)$ ja $f(t)$ on siledad, siis diferentseerides algset võrrandit, saame

$$y'(t) = \int_0^1 s\, y(s)\, ds + e^t - 1.$$

Diferentseerides teist korda, kaob ära määratud integraal (kuna see on mingi lõplik arv ja tuletis sellest on null),

$$y''(t) = e^t.$$

Märgime, et algtingimuse $y(0) = 1$ saab antud juhul lihtsalt, kui esialgses integraalvõrrandis kirjutada võrrand välja kohal $t = 0$. Analoogiliselt teisest võrrandist $y'(1) = \int_0^1 s\, y(s) + e - 1$ ja edasi saab juba algvõrrandist välja kirjutada rajatingimuse punktis $t = 1$: $y(1) = (y'(1) - e + 1) + e - 1$. Oleme saanud teist järku diferentsiaalvõrrandi rajaülesande

$$y''(t) = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y(1) - y'(1) = 0,$$

mille lahendiks on samuti funktsioon $y(t) = e^t$. $\diamond$

Näide 9.9. Varustuse vähenemine / kulumine (vananemine) ja selle juurde tellimine (välja vahetamine) uue vastu (vt. nt. [3]). Toome näite integraalvõrrandite tekkimise kohta reaalelu probleemidest. Antud näide on väga iseloomulik integraalvõrranditele, kus teatud reaaleluprobleemid saab mingis mõttes naturaalselt ära lahendada just integraalvõrrandite abil. Olgu meil toodetud / ostetud mingeid esemeid, mida peaks ajahetkel t kas siis laos või kuskil töös rakendatud olema koguses $f(t)$ (see kogus on meile teada). On selge, et müügi korral väheneb esemete arv ja mingite töövahendite kasutamise korral nad kuluvad. Seega tuleks neid ajahetkeks t juurde tellida / uuendada meile tundmatus koguses $r(t)$.

Kui meil on olemas varasem statistika nende esemete müümise / kulumise kohta, siis saab moodustada nn. ellujäämise funktsiooni (*Survival Function*) $K(t - \tau)$, mis näitab alles jäänud esemete arvu protsentides (varasemast ajahetkest τ kuni hetkeni t ehk vanusega $t - \tau$), funktsioon K on üldjuhul kahanev. Seda saab teha kasvõi olemasolevate andmete interpoleerimise teel. Sel juhul kirjeldab olukorda I liiki Volterra integraalvõrrand

$$f(t) - f(0)K(t) = \int_0^t K(t-\tau)r(\tau)\, d\tau,$$

kus otsitavaks on funktsioon $r(t)$. Siin kokkuleppeliselt $K(0) = 1$ (juhul $K(t) = 0$ on esemed kõik kulunud või läbi müüdud), $f(0)$ on esemete algne arv hetkel $t = 0$. Korrutis $f(0)K(t)$ on esemete arv, mis seisab müümata / kulutamata kuni ajahetkeni t. Lisaks, $r(\tau)\Delta\tau$ on uute (lisanduvate) esemete arv väikese ajaühiku $\Delta\tau$ kohta hetkel τ. Need lisanduvad uued esemed on hetkeks t vanusega $t-\tau$ ja seega nende ellujäämise funktsioon on $K(t-\tau)$ ning nendest allesjäänud esemete arv ajaühiku $\Delta\tau$ kohta hetkel τ on $r(\tau)K(t-\tau)\Delta\tau$. Summeerides need väikesed lisakogused alghetkest 0 kuni hetkeni t, saamegi vaadeldud integraalvõrrandi (siin integraal tähendab sisuliselt Riemanni integraali, kuna just selliselt on ta koostatud). $\diamond$

9.4 Fredholmi võrrandi omaväärtusülesanne

Definitsioon 9.10. Neid pramameetri λ väärtusi, mille puhul võrrandile (9.3) vastaval homogeensel võrrandil

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)\, dt = 0, \quad x \in [a,b], \tag{9.9}$$

on olemas mittetriviaalseid lahendeid, nimetatakse võrrandi (9.9) karakteristlikeks väärtusteks, nende pöördväärtusi $\mu = \frac{1}{\lambda}$ võrrandi (9.9) omaväärtusteks ning vastavaid võrrandi (9.9) mittetriviaalseid lahendeid $y(x) \neq 0$ selle võrrandi omafunktsioonideks.

Karakteristlike väärtuste ja omaväärtuste omadusi kirjeldab järgmine teoreem (vt. nt. [6]).

Definitsioon 9.11. Me ütleme, et arv a on reaalarvude hulga X kuhjumispunkt, kui igas arvu a ümbruses leidub vähemalt üks temast erinev hulga X punkt.

Kuhjumispunkt ei pruugi hulka X endasse kuuluda. Näiteks vahemiku $(0,1)$ kuhjumispunktide hulgaks on kogu lõik $[0,1]$.

Teoreem 9.2. *Kui võrrandi* (9.9) *tuum* $K(t,s)$ *on pidev funktsioon ruudul* $[a,b] \times [a,b]$*, siis võrrandil* (9.9) *saab olla ülimalt loenduv arv karakteristlikke väärtusi*

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *mille kuhjumispunktiks võib olla lõpmatus. Igale karakteristlikule väärtusele (igale omaväärtusele) vastab lõplik arv võrrandi* (9.9) *lineaarselt sõltumatuid omafunktsioone.*

Märkus 9.1. *Võrrandi* (9.9) *omafunktsioonid on määratud vaid konstandi täpsuseni, s.t. kui* $y(t)$ *on võrrandi* (9.9) *omafunktsioon, mis vastab karakteristlikule väärtusele* λ *(omaväärtusele* $1/\lambda$*), siis on võrrandi* (9.9) *omafunktsiooniks ka* $c\,y(t)$*, kus* $c \neq 0$ *on suvaline konstant (miks?).*

9.5 Lahendi olemasolu ja ühesus

Võrrandite (9.3) ja (9.4) lahendite olemasolu ja ühesuse kohta kehtivad järgmised tulemused (vt. nt. [6]).

Teoreem 9.3. *Kui vabaliige* $f(t)$ *on pidev lõigul* $[a, b]$ *ja tuum* $K(t, s)$ *on pidev ruudul* $[a, b] \times [a, b]$ *ning selline, et*

$$|\lambda| \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t, s)|\, ds < 1, \tag{9.10}$$

siis Fredholmi võrrand (9.3) *on üheselt lahenduv ja tema lahend* y *on pidev funktsioon lõigul* $[a, b]$*.*

Teoreem 9.4. *Kui tuum* $K(t, s)$ *on pidev kolmnurgal* $a \le s \le t \le b$ *ja vabaliige* $f(t)$ *on pidev lõigul* $[a, b]$*, siis Volterra võrrand* (9.4) *on üheselt lahenduv ning tema lahend* y *on pidev funktsioon lõigul* $[a, b]$*.*

Näide 9.10. Vaatleme võrrandit

$$y(t) = \int_0^1 t\,s\,y(s)\, ds + e^t - t, \quad 0 \le t \le 1,$$

See võrrand on kujul (9.3), milles tuum $K(t, s) = ts$ on pidev iga $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ korral ja vabaliige $f(t) = e^t - t$ on pidev iga $t \in [0, 1]$ puhul ning $\lambda = 1$. Kuna antud juhul

$$|\lambda| \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |ts|\, ds \le \int_0^1 s\, ds = \frac{1}{2} < 1,$$

siis tuginedes Teoreemile 9.3 saame öelda, et võrrandil on olemas üks ja ainult üks lahend, mis on pidev lõigul $[a, b]$. $\diamond$

Viited

[1] S. Abbott. Understanding Analysis. Springer, Birkhäuser, 2001.

[2] P. J. Collins. Differential and Integral Equations. Oxford University Press, 2006.

[3] A. J. Jerri. Introduction to Integral Equations with applications. Wiley, New York, 1999.

[4] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.

[5] A. Pedas. Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite ligikaudne lahendamine (loengukonspekt). Tartu, 2007.

[6] E. Tamme. Integraalvõrrandite lahendusmeetodid. Tartu, 1989.

[7] TPI matemaatika kateeder. Diferentsiaal- ja integraalarvutus. Tallinn, 1978.