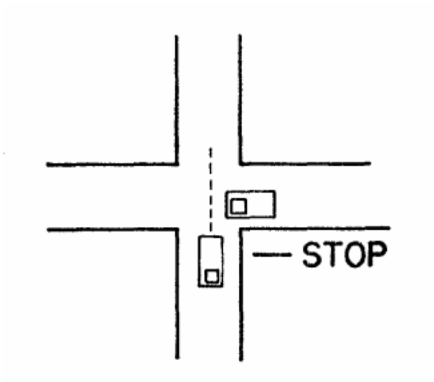
Marek Kolk, arvutipraktikum, Tartu Ülikool 2014,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine.

11 Liikluse modelleerimine

Vaatleme mudelit, kus hetkel $t = 0$ kõrvalteelt sõitev autojuht saabub stoppmärgi juurde ja soovib ületada ristmiku. Juht otsustab selle ületada, kui peateel liikuvate autode vahel on sobivalt pikk ajavahemik. Me eeldame, et peateel liikuvate autode vahel olevad vabad ajavahemikud on sõltumatud juhuslikud suurused teada oleva jaotusega. Meid huvitab, milline on kõrvalteelt saabuva auto ooteaja tõenäosusjaotus. Lihtsamal juhul on see tihti Poisson'i tüüpi jaotusega, kuid üldises mudelis võib olla veel teisi.



11.1 Modelleerimine II liiki lineaarse Volterra integraalvõrrandiga

Üheks selliseks mudeliks on II liiki Volterra integraalvõrrand (vt. [1, 2]):

$$\boxed{\omega(t) = \int_0^t \Psi(t-s)\cdot\omega(s)\,ds + \Psi_0(t), \quad t > 0} \tag{11.1}$$

kus

$$\Psi(t-s) = \phi(t-s)\cdot(1-G(t-s)), \quad \Psi_0(t) = \phi_0(t)\cdot(1-G(t)).$$

- $\omega(t)\,dt$ on tõenäosus, millega peateel liikuv sõiduk ületab ajavahemikus $(t, t+dt)$ ristmiku, samal ajal kui kõrvalteel ootav sõiduk ajavahemikus $(0, t)$ ristmiku ületanud ei ole. Lahend $\omega(t)$ ise on selle sündmuse tihedusfunktisoon.
- $G(t)$ on tõenäosus, millega kõrvalteel ootav auto ületab ristmiku, hinnates peateel autovabaks ajaks t ajaühikut. Mida suurem on t, seda suurema tõenäosusega ristmik ületatakse.
- $\phi(t)$ näitab peateel liikuvate autode vahel olevat sobivalt pikkade ajavahemike jaotuse tihedust (s.t. neid hetki, millal kõrvalteel liikuv sõiduk saab ületada ristmiku). Sel juhul $\phi(t)\,dt$ on tõenäosus, et selline vaba hetk asub ajavahemikus $(t, t+dt)$.

- $\phi_0(t)$ on kõrvalteelt saabuva auto suhtes peateel liikuva I auto saabumise tõenäosustihedus.

Poisson'i jaotuse funktsioonid

Kui peateel liikuvate autode vahele jäävad tühikud on Poisson'i jaotusega, siis

$$G(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq T, \\ 1 - e^{-\lambda \cdot (t-T)} & , t > T, \end{cases}$$

ja

$$\phi(t) = \sigma \cdot e^{-\sigma \cdot t}, \quad \phi_0(t) = \sigma_0 \cdot e^{-\sigma_0 \cdot t}.$$

Katsete põhjal (tõsi, siinkohal vaid 1960-ndad) selgitatud, et kehtivad järgmised miinimum ooteajad T (sekundites) jaoks (võttes arvesse ka inimeste erinevat reaktsiooni ja stiili).

- Veergudes 2.-4. on toodud vajalik miinimumaeg T kõrvalteelt kohapealt startides, peateele pööramiseks ja saavutamaks päises oleva kiiruse, et sulanduda liiklusvoogu.
- Veergudes 5.-7. on toodud minimaalne vajalik aeg T kohapealt startides, et ületada ristmik, mille laius on päises toodud.

	50 km/h	72 km/h	96 km/h	15 m	23 m	30 m
sportauto	4	6.1	8.9	3.1	3.5	3.9
keskmine mööduja	5.6	9.7	15.8	3.2	4.0	4.8
väike vanem auto	7.6	16.5	36	3.3	4.5	5.4

Ooteaja tõenäosustihedus

Tihedusfunktsiooni $\omega(t)$ abil saab arvutada ooteaja tihedusfunktsiooni

$$\Omega(t) = \bar{a} \cdot \omega(t), \qquad \text{kus} \quad \bar{a} = \int\limits_0^\infty G(s) \cdot \phi(s)\, ds$$

on keskväärtus tõenäosusele, et järgmine vaba „vahemik“ sobib ristmiku ületamiseks. Viimase kaudu saab omakorda arvutada keskmise ooteaja

$$\bar{t} = \int\limits_0^\infty s \cdot \Omega(s)\, ds.$$

Analoogiliste ideedega saab modelleerida jalakäijate liikumist, fooride paigaldamist ja selle mõju liiklusele jne. Vajalik on see ennekõike tipptunnil.

Viited

[1] R. Herman, G. Weiss. Comments on the Highway-Crossing Problem. Operations Research, vol. 9, no. 6, pp. 828-840, 1961.

[2] G. H. Weiss, A. A. Maradudin. Some Problems in Traffic Delay. Operations Research, vol. 10, no. 1, pp. 74-104, 1962.

11.2 II liiki lineaarse Volterra integraalvõrrandi lahendamine kollokatsiooni-meetodiga (kasutades treppfunktsioone)

1. Otsime võrrandi
$$u(t) = \int\limits_0^t K(t,s)\,u(s)\,ds + f(t), \quad t \in [0,b],$$
lahendit $u = u(t)$, tema lähislahendit $u_N(t)$ aga spetsiaalsel kujul
$$u_N(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j \cdot \varphi_j(t), \quad N \in \mathbb{N}.$$
Siin $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_N(t)$ on nn. parempoolsed treppfunktsioonid
$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 & , t \in (t_{j-1}, t_j], \\ 0 & , t \notin (t_{j-1}, t_j], \end{cases} \quad j = 1, \ldots, N,$$
kus võib võtta $t_0 = t_1 - h$. SciLab'i jaoks võib olla abiks järgmine idee:
```
function yy = fii( t , aa , bb )
 yy = sign(sign( t - aa ).*sign( bb - t ) + 1) ...// [aa,bb]
        .* abs( sign( t - aa ) )   // x=aa eraldamine
endfunction
```
Viimane lubab φ kasutada ka esimese üksiku punkti $t_1 = 0$ jaoks.

2. Loome ühtlase vahemikega sõlmed
$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b, \quad t_i = h \cdot (i-1), \quad i = 1, \ldots, N, \quad h = \frac{b}{N-1}.$$

3. Kirjutame võrrandi (11.1) välja sõlmedes $t_1, \ldots, t_N$:
$$u(t_i) - \int\limits_0^{t_i} K(t_i,s)\,u(s)\,ds = f(t_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$
Asendame u tema lähislahendiga u_N:
$$u_N(t_i) - \sum_{j=1}^{N} \left(\int\limits_0^{t_i} K(t_i,s) \cdot \varphi_j(s)\,ds \right) \cdot c_j = f(t_i), \quad i = 1, \ldots, N.$$

4. Kuna $\varphi_i(t_i) = 1$ ja $\varphi_i(t_j) = 0$ $(i \neq j)$ ning iga baasfunktsioon φ_j on nullist erinev vaid osalõigul $(t_{j-1}, t_j]$, siis saame eelmist süsteemi lihtsustada:
$$\boxed{c_1 = f(t_1), \quad c_i - \sum_{j=2}^{N} \left(\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_i,s)\,ds \right) c_j = f(t_i), \quad i = 2, \ldots, N}$$

Esitame siinjuures süsteemi $A \cdot c = F$ skemaatiliselt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1-a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -a_{N2} & -a_{N3} & \cdots & -a_{N,N-1} & 1-a_{N,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix},$$

kus

$$a_{ij} = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_i, s)\, ds, \quad i = 2, \ldots, N, \quad j = 2, \ldots, i.$$

Tavaliselt täidetakse maatriks A kahe for-tsükli abil, mida võib ka siinkohal teha.

```
AA( i,j ) = h*( K( t(i) , t(j-1) ) + K( t(i) , t(j) ) )/2
// Integraalid asendame trapetsvalemiga (täpsemalt ei ole vaja)
AA = eye( AA ) - AA
AA = sparse(AA)   // umfpack käsu jaoks
yy = umfpack(AA,'\',FF) // hõreda AA ja ka diagonaalse AA jaoks
```

11.3 Praktikumi ülesanne

1. Vaatleme parameetrite väärtusi

$$T = 3.3, \quad \lambda = 2.7, \quad \sigma = \sigma_0 = 0.2.$$

2. (3p) Lahendada võrrand (11.1) kollokatsioonimeetodiga, kasutades baasfunktsioonideks parempoolseid treppfunktsioone. Lahendame võrrandi ajalõigul $[0, b] = [0, 20]$. Kasutage algul väikest N väärtust. Mainime, et ülesanne vajaks lahendamist näiteks lõigul $[0, 500]$ osalõikude arvuga $N = 2500$, kuid viimase valiku korral on arvutused äärmiselt aeglased.

3. (1p) Lähislahend tuleks defineerida baassplainide abil funktsiooni kujul,

$$\omega_N(t) = c_1 \cdot \varphi_1(t) + \sum_{j=2}^{N} c_j \cdot \varphi_j(t),$$

kus kordajad $c_0, \ldots, c_N$ leitakse kollokatsiooni võrranditest.

4. $\Omega(t)$ on ooteagade tihedusfunktsioon $t > 0$ jaoks. Hetkel saab selle ka täpselt leida,

$$\Omega(t) = \omega(t) \cdot \int\limits_0^\infty G(s) \cdot \psi(s)\, ds = e^{-\sigma T} \cdot \left(1 - \frac{\sigma}{\lambda + \sigma} \cdot e^{-\lambda T}\right) \cdot \omega(t), \quad t > 0. \tag{11.2}$$

5. (1p) Leida ooteaegade keskväärtus

$$\bar{t} = \int\limits_0^\infty s \cdot \Omega(s)\, ds \approx \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot x_i \cdot \Omega(x_i),$$

kus w_i on kvadratuurvalemi kaalud ja x_i tihendatud sõlmed lõigul [0,b].