Marek Kolk, arvutipraktikum, Tartu Ülikool 2014,
Diferentsiaal- ja integraalvõrrandite numbriline lahendamine.

12 Integraalvõrrandi lähislahendi võrdlemine täpse lahendiga

Kui me teame võrrandi täpset lahendit, siis ühest küljest pole meil enam vaja seda võrrandit lahendada. Teisalt, teades täpset lahendit, saame uurida mõne meid huvitava lähismeetodi käitumist ning analüüsida lahendamisel tekkinud viga, meetodi koondumist jms. Lisaks on täpse lahendiga ülesanne abiks arvutikoodi kontrollimisel.

12.1 Lineaarne II liiki Fredholm'i integraalvõrrand

Vaatleme järgmist Fredholm'i integraalvõrrandit:

$$\boxed{u(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x+1)\cdot e^{-x\cdot s}\cdot u(s)\,ds + e^{-x} + \frac{1}{2}\cdot e^{-(x+1)} - \frac{1}{2}, \quad x \in [0,1]} \tag{12.1}$$

mille täpne lahend (vt. [1, 2]) on

$$u(x) = e^{-x}, \quad x \in [0,1].$$

Viited

[1] R. Kress. Linear Integral Equations. New York: Springer-Verlag, 1989.

[2] R. Kress. Numerical Analysis, New York: Springer-Verlag, 1998.

12.2 II liiki lineaarse Fredholm'i integraalvõrrandi lahendamine splain-kollokatsioonimeetodiga (kasutades katusfunktsioone)

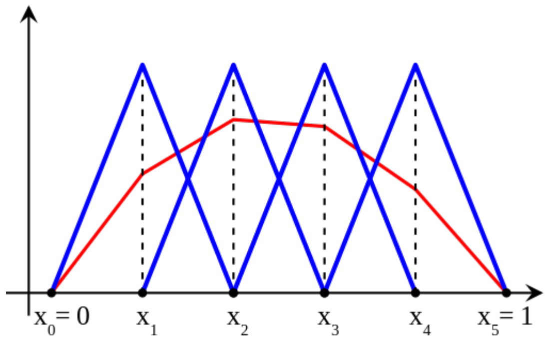
1. Otsime võrrandi

$$u(x) = \int_a^b K(x,s)\,u(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a,b],$$

lahendit $u = u(x)$, tema lähislahendit $u_N(x)$ aga spetsiaalsel kujul

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \cdot \varphi_j(x), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Siin $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_N(x)$ on nn. katusfunktsioonid



$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x-x_j|}{h} & , x \in (x_{j-1}, x_{j+1}], \\ 0 & , x \notin (x_{j-1}, x_{j+1}], \end{cases} \quad j = 0, \ldots, N,$$

kus võib võtta $x_{-1} = x_0 - h$ ja $x_{N+1} = x_N + h$. Märgime, et esimese φ_0 ja viimase elemendi φ_N jaoks kasutame h abil sama valemit, kuid meeles peab pidama, et lähislahend on defineeritud ikkagi ainult lõigul $[a,b]$.

2. Loome ühtlase vahemikega sõlmed

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b, \quad x_i = a + h \cdot i, \quad i = 0, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

3. Kirjutame võrrandi (12.1) välja sõlmedes $x_0, \ldots, x_N$:

$$u(x_i) - \int_a^b K(x_i,s)\,u(s)\,ds = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N.$$

Asendame u tema lähislahendiga u_N:

$$u_N(x_i) - \sum_{j=0}^{N} \left(\int_a^b K(x_i,s) \cdot \varphi_j(s)\,ds \right) \cdot c_j = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N.$$

4. Kuna $\varphi_i(x_i) = 1$ ja $\varphi_i(x_j) = 0$ $(i \neq j)$ ning iga baasfunktsioon φ_j on nullist erinev vaid osalõigul $(x_j - h, x_j + h]$, siis saame eelmist süsteemi lihtsustada:

$$\boxed{\begin{aligned} c_i \quad & - \left(\int\limits_a^{a+h} K(x_i, s) \cdot \varphi_0(s)\, ds \right) \cdot c_0 - \left(\int\limits_{b-h}^{b} K(x_i, s) \cdot \varphi_N(s)\, ds \right) \cdot c_N \\ & - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\int\limits_{x_j-h}^{x_j+h} K(x_i, s) \cdot \varphi_j(s)\, ds \right) \cdot c_j = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, N \end{aligned}}$$

Esitame siinjuures süsteemi $A \cdot c = F$ skemaatiliselt:

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{00} & -a_{01} & -a_{02} & \cdots & -a_{0,N-1} & -a_{0,N} \\ -a_{10} & 1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1,N-1} & -a_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_{N,0} & -a_{N,1} & -a_{N,2} & \cdots & -a_{N,N-1} & 1 - a_{N,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix},$$

kus

$$a_{i0} = \int\limits_a^{a+h} K(x_i, s) \cdot \varphi_0(s)\, ds, \quad a_{iN} = \int\limits_{b-h}^{b} K(x_i, s) \cdot \varphi_N(s)\, ds, \qquad i = 0, \ldots, N,$$

ja

$$a_{ij} = \int\limits_{x_j-h}^{x_j+h} K(x_i, s) \cdot \varphi_j(s)\, ds, \quad i = 0, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Tavaliselt täidetakse maatriks A kahe for-tsükli abil.

```
AA = eye( AA ) - AA
yy = linsolve( AA , -FF ) // AA + FF = 0
```

12.3 Praktikumi ülesanne

1. (2p) Lahendada võrrand (12.1) splain-kollokatsioonimeetodiga, kasutades baasfunktsioonideks katusfunktsioone.

2. Süsteemis $A \cdot c = F$ leiduvad integraalid võib asendada näiteks Simpson'i $O((\beta - \alpha)^5)$-järku valemiga,

$$\int\limits_\alpha^\beta G(s)\, ds \approx \frac{H}{3} \cdot (G(\alpha) + 4 \cdot G(\alpha + H) + 2 \cdot G(\alpha + 2 \cdot H) + 4 \cdot G(\alpha + 3 \cdot H) + G(\beta)),$$

kus

$$H = \frac{\beta - \alpha}{4}.$$

3. (1p) Defineerida lähislahend $u_N(x)$ funktsiooni kujul

$$u_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j \cdot \varphi_j(x).$$

4. (1p) Lähislahendi võrdlemine täpse lahendi joonisega ei pruugi anda õiget pilti. Kindlam on leida lahendite vaheline viga ning uurida selle vea käitumist osalõikude arvu suurendamise korral. Leida täpse lahendi ja lähislahendite maksimaalne absoluutne viga sõlmedes $N = 4, 8, 16, \ldots, 128$ korral,

$$E_N = \max_{i=0,\ldots,N} |u(x_i) - u_N(x_i)|$$

ja leida vastavad suhted

$$\frac{E_4}{E_8}, \quad \frac{E_8}{E_{16}}, \ldots, \frac{E_{64}}{E_{128}}.$$

5. (1p) Leida täpse lahendi ja lähislahendite ligikaudne absoluutse vea norm $N = 4, 8, 16, \ldots, 128$ korral,

$$\Delta_N = \|u - u_N\|_\infty \approx \max_{\substack{i=0,\ldots,N-1 \\ j=0,\ldots,10}} |u(t_{ij}) - u_N(t_{ij})|,$$

kus

$$t_{ij} = x_i + j \cdot \frac{h}{10}, \quad i = 0, \ldots, N-1, \quad j = 0, \ldots, 10.$$

ja leida vastavad suhted

$$\frac{\Delta_4}{\Delta_8}, \quad \frac{\Delta_8}{\Delta_{16}}, \ldots, \frac{\Delta_{64}}{\Delta_{128}}.$$