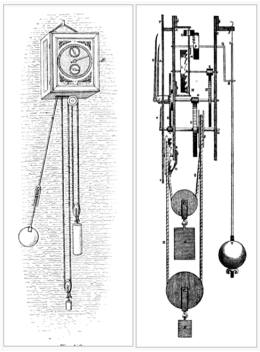
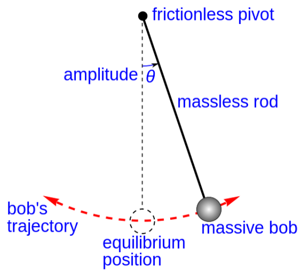
3 Pendli sundvõnkumine

Pendli lihtsaim igapäevane rakendus on aja määramine (pendelkellad), meelelahutuslikult kasutatakse pendlit küll ennustamiseks ja muuks müstiliseks tegevuseks. Kuid pendlit (siinjuures ka elektroonilist pendlisüsteemi kui lihtsalt perioodilist protsessi) kasutatakse ka muusikas metronoomi juures (rütmi hoidmiseks), kiigesüsteemides, tsirkusenumbrite loomiseks, raadiolainete häälestamiseks. Pendlisüsteeme võib ajada ka keerulisemaks, nagu näiteks mehaanikasüsteemides (kolvid, pumbad), ehituste konstruktsioonides, et vähendada maavärinate mõju jne.





Fotod: Wikipedia

Vaatleme pendli sundvõnkumise võrrandit

$$\left\{\begin{aligned} y''(t) + \frac{g}{L}\cdot\sin\left(y(t)\right) + d\cdot y'(t) &= A\cdot\sin(t) \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y'_0 \end{aligned}\right\}. \tag{3.1}$$

Ühtlasest vardast pendel on kinnitatud koordinaatide alguspunkti $(0,0)$ ja ripub allapoole.

- $y(t)$ on pendli ja vertikaaltelje vaheline nurk radiaanides ajahetkel t. Kui $y = 0$ või üldisemalt $y = 2\,k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, siis on pendel oma tasakaaluasendis.
- y' on pendli nurkkiirus (radiaani sekundis).
- $g \approx 9.81$ on raskuskiirendus $(\mathrm{m/s^2})$.
- L on pendli pikkus.
- $d > 0$ on pendli võnkumise sumbumistegur, mis lihtsamal juhul modelleerib näiteks õhu takistuse või muu teguri mõju pendlile.
- $A\cdot\sin(t)$ on pendlile perioodiliselt mõjuv välisjõud, mis võimendab pendli võnkumist. Viimase rollis võib olla ka näiteks magnetvälja mõju laengut omavale pendlile.

Viited

[1] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.

3.1 Jätkatud astmerea meetod

Eesmärgiks on leida lahendi y lähisväärtused $y_0, \ldots, y_N$ sõlmedes $t_0, \ldots, t_N$. Kasutades lahendi y tuletisi kuni järguni m, lahendada toodud ülesanne jätkatud astmerea ehk Taylor'i meetodiga

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{y^{(j)}(t_i)}{j!} \cdot h^j, \quad i = 0, \ldots, N, \quad t_i \in [0, T].$$

Kogu meetodi raskus peitub tuletiste $y^{(j)}(t_i)$ leidmisel.

1. Lahendi tuletiste väärtuste jaoks on kasulik tekitada näiteks $(m+1) \times (N+1)$ maatriks Y (alguses täidetud nullidega), mille igassse ritta kogume y erinevat järku tuletised vastavates sõlmedes $t_0, \ldots, t_N$.

$$Y = \begin{pmatrix} \mathbf{y_0} & y_1 & y_2 & \cdots & y_N \\ \mathbf{y_0'} & y_1' & y_2' & \cdots & y_N' \\ y_0'' & y_1'' & y_2'' & \cdots & y_N'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_0^{(m)} & y_1^{(m)} & y_2^{(m)} & \cdots & y_N^{(m)} \end{pmatrix}$$

I reas on sel juhul lähislahend ise, 2. reas on I järku tuletised jne.

2. Kui me teame maatriksi Y i-nda veeru **kõiki** elemente, siis saab jätkatud Taylor'i meetodi

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{y^{(j)}(t_i)}{j!} \cdot h^j$$

sammu SciLab'is kirja panna kompaktselt vektorkujul

```
abi1 = 1.0./factorial([0:m])            // faktoriaalid
abi2 = h.^[0:m]                         // astmed
Y(1,i+1) = sum( Y(:,i)'.*abi1.*abi2 )  // Taylor'i valem
```

Siin siis $Y(1, i+1)$ on lähislahendi y_{i+1} rollis.

3. Järgnevalt tuleks igal sammul leida puuduvad tuletised $Y(2, i+1), \ldots, Y(m, i+1)$. Kohe selgitame, kuidas seda teha.

4. Algtingimusest on meil teada $y_0' = Y(2, 1)$. Teised väärtused samas reas meil teada ei ole. Väärtuste leidmiseks kasutame Taylor'i rea

$$y_{i+1}' = y_i' + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{y^{(j+1)}(t_i)}{j!} \cdot h^j$$

avaldist ehk SciLab'is

$$\mathtt{Y(2,i+1) = sum(Y(2:\$,i)'.*abi1(1:\$-1).*abi2(1:\$-1))}$$

5. Algvõrrandi abil leiame teist järku tuletised (sedasi ka esimesel sammul),

$$Y(3,i) = f(t(i), Y(:,i))$$

ja kõrgemat järku tuletiste jaoks diferentseerime funktisooni f (sel juhul tuleks ilmselt defineerida f asemel erinevad tuletisfuntksioonid). Toome näite, kus

$$f(t,y) = t^2 + y^2.$$

```
function yy = f0(t,y)        // f ise
    yy = t^2 + y(1)^2
endfunction
function yy = f1(t,y)        // f tuletis
    yy = 2*t + 2*y(1)*y(2)
endfunction
function yy = f2(t,y)        // f teine tuletis
    yy = 2 + 2*y(2)^2 + 2*y(1)*y(3)
endfunction
```

3.2 Ülesanded

Ülesanne 3.1

Kirjutada protseduur lahendi leidmiseks jätkatud Taylor'i meetodil. Igas sõlmes arendame lahendi astmeritta, milles on viis liiget (kasutades tuletisi järguni 4).

Ülesanne 3.2

Olgu pendli pikkus $L = 1$ ja sumbumistegur $d = 1$. Võtame algtingimuseks $y(0) = \frac{\pi}{2}$ ja $y'(0) = 0$. Ülesande lahendame ajalõigul $t \in [0, 45]$. Võttes $A = 13$, tehke (umbkaudu) kindlaks vajaminev osalõikude arv N, mille korral teie leitud lahend enam palju ei muutu. Piisab hinnangust joonise järgi.

Ülesanne 3.3

Veenduge, et $A = 0$ korral on tegemist sumbuva võnkumisega. Kui võtta $A = 10$, siis jääb pendel tsüklisse, millisesse (mitu tiiru vasakule ja mitu paremale)? Kui võtta $A = 12$, siis on tsükkel veelgi põnevam. Veenduge, et $A = 15$ korral on lahend kaootiline (kui palju mõjutab siin N suurendamine?)

Ülesanne 3.4

Olles eelneva kõik läbi teinud, mida head või halba võiks öelda astmerea meetodi kohta?