

## 4 Tacoma Narrows'i ripp-sild

1940. aasta 7. novembril sattus Ameerikas Washingtoni osariigis asuv Tacoma Narrows'i ripp-sild tugeva tuule kätte, mis põhjustas silla peal ja all õhukeeriseid ning sillal tekkisid igapäevases suuremad horisontaal- ja vertikaalsuunalised võnkumised. Silla konstruktsioon ei pidanud vastu ja ta varises u. 45 minuti jooksul kokku. Silla projekteeris tuntud USA insener Leon S. Moisseiff ja see avati liikluseks vaid viis kuud tagasi, 1. juulil 1940. aastal.

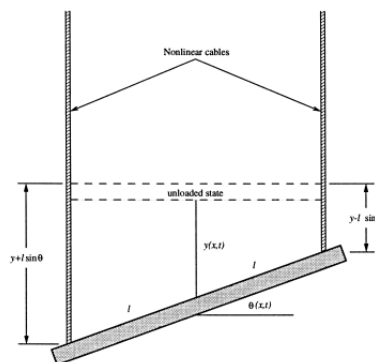
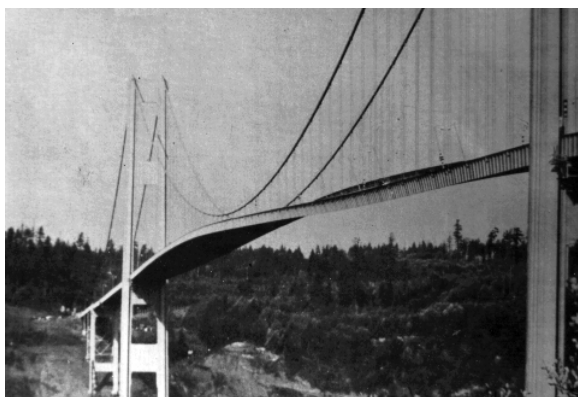


FIG. 2.1. A simple model of the center span and its horizontal cross section.

Vasaku foto allikas: Wikipedia

Põhjuseks on toodud insenerilahendust, mis ei arvestanud tuule piisava läbilaskmisega silla külgedel ning lisaks kasutati silla konstruktsioonis ümarate nurkade asemel liiga järsked üleminekuid. Mär-gime, et silla kokkuvarisemine ei olnud tingitud resonantsist. Selliste õnnetuste vältimiseks on kõige odavam lahendus kasutada arvutimudeleid, kus saab üsna lihtsalt uurida teatud suuruste mõju süsteemi lahendile.

### 4.1 Silla ristlõike modelleerimine II järku võrrandite süsteemi abil

Silla võnkumist on püüdnud modelleerida paljud teadlased (vt. nt. [1, 2, 3]). Me vaatleme konk-reetselt McKenna ja Tuama mudelit õpikust [4]:

$$\begin{aligned}
 y''(t) &= -d \cdot y'(t) - \frac{K}{m \cdot A} \cdot \left( e^{A \cdot (y(t) - l \cdot \sin(\theta(t)))} + e^{A \cdot (y(t) + l \cdot \sin(\theta(t)))} - 2 \right) + 0.2 \cdot W \cdot \sin(\omega \cdot t), \\
 \theta''(t) &= -d \cdot \theta'(t) + \frac{3 \cdot \cos(\theta(t))}{l} \frac{K}{m \cdot A} \cdot \left( e^{A \cdot (y(t) - l \cdot \sin(\theta(t)))} - e^{A \cdot (y(t) + l \cdot \sin(\theta(t)))} \right).
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

- Me kasutame ainult silla läbilõiget mingis punktis, arvestamata silla pikkust. Silla maantee osa ripub trosside küljes.
- $y = y(t)$  on silla keskpunkti kõrgus (meetrites) tasakaalu asendi suhtes ajahetkel  $t$  sekundit.
- $\theta(t)$  on silla kaldenurk (radiaanides) horisontaalasendi suhtes.
- $W$  km/hr on tuule kiirus,  $\omega = 2\pi\frac{38}{60}$  on võnkesagedus (vaatleja loendas hetk enne kokkuvõrsemist 38 vertikaalsuunalist võnkumist minutis). Suurus  $0.2 \cdot W \cdot \sin(\omega \cdot t)$  modelleerib lihtsustatult tuule käitumist.
- Silla teised parameetrid:
  - pool laiust  $l = 6$  m,
  - võnkumise sumbumistegur  $d = 0.01$  (valides erinevaid insenerilahendusi ja ehitusmaterjale, saab seda muuta),
  - Hooke'i mittelineaarsuse parameeter  $A = 0.2$ ,
  - vedru jäikuse parameeter  $K = 1000$  N/m,
  - ühe jala pikkuse tee mass  $m = 2500$  kg.

## Viited

- [1] B. A. Fillenwarth. Improving the Mathematical Model of the Tacoma Narrows Bridge. Rose-Hulman Undergraduate Math Journal, 8, no. 2, 2007.
- [2] P.J. McKenna, C. O'Tuama. Large torsional oscillations in suspension bridges revisited yet again: Vertical forcing creates torsional response. Amer. Math. Monthly, 108, pp. 738-745., 2001.
- [3] K. S. Moore. Large torsional oscillations in a suspension bridge: multiple periodic solutions to a nonlinear wave equation. SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 33, no. 6, pp. 1411-1429, 2002.
- [4] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [5] YouTube, <http://www.youtube.com/watch?v=j-zczJXSxw>

## 4.2 Võrrandisüsteemi ligikaudne lahendamine Runge meetodiga

1. Pärast muutujavahetusi  $y' = z$  ja  $\theta' = \xi$  on meil sisuliselt I järku diferentsiaalvõrandite süsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = z(t) \\ z'(t) = f_1(t, y, z, \theta, \xi) \\ \theta'(t) = \xi(t) \\ \xi'(t) = f_2(t, y, z, \theta, \xi) \end{array} \right\},$$

mille saab vektorkujul kirjutada lihtsamalt:

$$Y'(t) = f(t, Y(t)), \quad Y(t_0) = Y_0.$$

Siinjuures  $Y$  ja  $f$  on 4-realised vektorfunktsioonid.

2. Vektorfunktsiooni saab kirja panna näiteks järgmiselt:

```

function yy = f( t , Y )
    yy = [ Y(2) ; f1( t , Y(1) , Y(2) , Y(3) , Y(4) ) ; ...
          Y(4) ; f2( t , Y(1) , Y(2) , Y(3) , Y(4) ) ]
endfunction

```

3. Valime osalõigu  $[a, b]$ , milles ülesannet lahendame.

4. Valime osalõikude arvu  $N \in \mathbb{N}$ , moodustame ühtlaselt paiknevad sõlmed

paberil	arvutis
$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$	$\mathbf{t} = \mathbf{linspace}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{N}+1)$

5. Otsime lähislahendit  $Y_0, \dots, Y_N$  vastavalt sõlmedes  $t_0, \dots, t_N$ . Oluline on, et seekord kujutab lahend  $Y$  endast  $4 \times (N + 1)$ -mõõtmelist maatriksit

$$Y = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_N \\ \mathbf{z}_0 & z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ \theta_0 & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_N \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_N \end{pmatrix}.$$

funktsiooni  $y = y(t)$  lähisväärtused

tuletiste  $y'(t)$  lähisväärtused

funktsiooni  $\theta = \theta(t)$  lähisväärtused

tuletiste  $\theta'(t)$  lähisväärtused

Sel juhul  $Y_i$  on maatriksi  $i$ -nda veeru elemendid.

6. Me teame I veeru  $Y_0$  elemente (omistame  $Y(:, 1) = Y_0$ ).

7. Leiame lähislahendid  $Y_1, \dots, Y_N$  Runge-Kutta 5. järku meetodiga

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{90} \cdot (7 \cdot K_1 + 32 \cdot K_3 + 12 \cdot K_4 + 32 \cdot K_5 + 7 \cdot K_6), \quad i = 0, \dots, N - 1,$$

kus

$$\begin{aligned}
 K_1 &= F(x_i, y_i), \\
 K_2 &= F\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, Y_i + \frac{h}{2} \cdot K_1\right), \\
 K_3 &= F\left(x_i + \frac{1}{4} \cdot h, Y_i + \frac{h}{16} \cdot (3 \cdot K_1 + K_2)\right), \\
 K_4 &= F\left(x_i + \frac{1}{2} \cdot h, Y_i + \frac{h}{2} \cdot K_3\right), \\
 K_5 &= F\left(x_i + \frac{3}{4} \cdot h, Y_i + \frac{h}{16} \cdot (-3 \cdot K_2 + 6 \cdot K_3 + 9 \cdot K_4)\right), \\
 K_6 &= F\left(x_i + h, Y_i + \frac{h}{7} \cdot (K_1 + 4 \cdot K_2 + 6 \cdot K_3 - 12 \cdot K_4 + 8 \cdot K_5)\right).
 \end{aligned}$$

8. Me täidame maatriksit  $Y$  veergude kaupa vasakult paremale.

$$K1 = F( t(i) , Y( : , i ) ) // teised K2, \dots, K6 analoogiliselt \\ Y( : , i+1) = Y( : , i ) + h/90 * ( 7*K1 + 32*K3 + 12*K4 + 32*K5 + 7*K6 )$$

### 4.3 Praktikumülesanded

#### Ülesanne 4.1

Olgu meil algtingimused

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad \theta'(0) = 0,$$

nurga  $\theta(0)$  määrame järgnevas tekstis. Ülesande lahendamiseks kasutage Runge-Kutta 5. järku meetodiga.

Jälgime ülesannet esimese 20 minuti jooksul ( $[a, b] = [0, 1200]$ ), arvutustes kasutatav samm pikkus võib olla näiteks  $h = 0.1$ . Milline on olukord, kui tuule kiirus on 50 km/hr ja algasendi kaldenurk  $\theta(0) = 0.001$  radiaani? Teha eraldi graafikud kõrgusest ja kaldenurgast. Tuul põhjustab sillal vertikaalsuunalise võnkumise ( $y$  muutumine), aga kas nn. horisontaalsuunalised võnkumised ( $\theta$  muutumine) vaibuvad või mitte?

#### Ülesanne 4.2

Milline on olukord, kui tuule kiirus on 68 km/hr (puhus silla kokku varisemise päeval) ja algasendi kaldenurk  $\theta(0) = 0.001$  radiaani?

#### Ülesanne 4.3

Sild on stabiilne, kui horisontaalsuunalised võnkumised hääbuvad. Tacoma Narrows'i silla projekteerimisel arvestati küll vertikaalsuunaliste võnkumistega (sealjuures päris suurtega), kuid horisontaalsuunaliste võnkumiste selline võimendumine tuli suureks üllatuseks.

Kas annab olukorda parandada sumbumisteguri suurendamisel ( $d = 0.02$  ja  $d = 0.04$ , saavutatav mingite paremate insenerilahenduste ja materjalide kasutamise abil)? Leida väikseim selline  $d$  väärtus, mille korral silla horisontaalsuunalised võnkumised hääbuvad, kui algasendi kaldenurk on 1 kraad ja tuule kiirus on 136 km/hr.

#### Ülesanne 4.4

Kuidas kommenteerite suurema sammu kasutamist ( $N = 1240$ ), kui  $d = 0.02$  ja  $W = 136$ ?