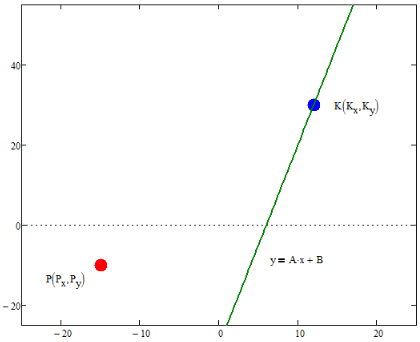
5 Jälitamisülesanne

Inglisekeelses kirjanduses on see tuntud kui *Pursuit Problem.* Probleemi tuntakse prantsuse matemaatiku Pierre Bouger' (1698-1758) järgi, kes avaldas selle 1732. aastal ajakirjas „French Academy's Memoires de l'Academie Royale des Sciences“. Me vaatame ühte erijuhtu, kuid samas mitte seda kõige lihtsamat varianti, kus kaubalaev liigub ainult püstsirgel.

Allikas: Wikipedia



5.1 Modelleerimine II järku diferentsiaalvõrrandiga

Olgu meil piraatide laeva kiirus v_p ja kaubalaeva kiirus v_k (lihtsuse mõttes on mõlemad kiirused muutumatud). Piraatide laev asub punktis

$$P(P_x, P_y)$$

ja kaubalaev punktis

$$K(K_x, K_y).$$

Liikugu kaubalaev mööda üldist sirget

$$y = A\,x + B.$$

Sel juhul algtingimustega ülesande

$$\left\{\begin{aligned} y''(x) &= \frac{v_k}{v_p}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}\cdot\frac{(y'(x)-A)^2}{y(x)-(A\,x+B)}\cdot\sqrt{1+[y'(x)]^2} \\ y(P_x) &= P_y \\ y'(P_x) &= \frac{K_y-P_y}{K_x-P_x} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

lahend y(x) kirjeldab piraatide laeva liikumistrajektoori juhul, kui liigutakse nii, et hoitakse kurss alati otse kaubalaeva poole. Sedasi on võimalik lahendada analoogilisi jälitamisülesandeid, kuid leida ka näiteks puksiiris liikuvate laevade, sõidukite trajektoore jne.

Tehes muutujavahetuse $y'(x) = z(x)$, saame 1. järku lineaarvõrrandite süsteemi

$$\left\{\begin{aligned} y'(x) &= z(x) \\ z'(x) &= \frac{v_k}{v_p} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \cdot \frac{(z(x)-A)^2}{y(x)-(A\,x+B)} \cdot \sqrt{1+z^2(x)} \\ y(P_x) &= P_y \\ z(P_x) &= \frac{K_y - P_y}{K_x - P_x} \end{aligned}\right\}. \tag{5.2}$$

Viited

[1] M. Severdia. Pursuit Curves. 2008. `http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/deproj/sp08/mseverdia/pursuit.pdf`

[2] P. J. Nahin. Chases and Escapes: The Mathematics of Pursuit and Evasion. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2007.

[3] E. W. Weisstein. Trawler Problem. From MathWorld - A Wolfram Web Resource. `http://mathworld.wolfram.com/TrawlerProblem.html`

5.2 Ligikaudne sammul tekkiv viga, sammu poolitamise võte

Esitatud programmi skeem ei ole arvutuslikult just kõige efektiivsem ja ökonoomsem, kuid peaks olema piisavalt ülevaatlik, et teemaga esmakordselt tutvuda. Praktikas tuleks igasugu tingimuslauseid ja lisaarvutusi kasutada nii vähe kui võimalik, kuid viimane viib algoritmi jälgimise keerukaks.

1. Valime maksimaalse lubatud relatiivse vea $\varepsilon > 0$ ja algsammu $h > 0$.

2. Teeme „while“ tsükli, mille täitmise tingimuseks võiks olla kontroll, kas oleme jõudnud punktist a punkti b või mingi muu ülesandega seotud tingimus.

```
t = t0  // ajasammud (hiljem dimensioon muutub)
y = y0  // lähislahendid (hiljem dimensioon muutub)
while  tingimus  // jätkatakse, kui "‘tingimus"’ on tõene
    tt = t($)      // võtame t viimase väärtuse
    yy = y( : , $ )      // võtame y viimase veeru väärtused
    // tsükli sisu
end
```

3. Iga tsükli sammu korral loome sõlme $tt + h$ ja arvutame mingi meetodiga lähislahendi y^h, sammu pikkusega h. Selleks võib kasutada näiteks skeemi (analoogiselt varem tehtuga, lõigul $[a, b] = [tt, tt + h]$ algtingimusega yy ja osalõikude arvuga $N = 1$)

$$\text{yh} = \text{meetod}(\ tt\ ,\ tt + h\ ,\ yy\ ,\ 1\ )\ .$$

4. Nüüd leiame sama meetodiga lähislahendi $y^{h/2}$, pooliku sammu pikkusega $h/2$, näiteks

$$\text{yh2} = \text{meetod}(\ tt\ ,\ tt + h\ ,\ yy\ ,\ 2\ )\ .$$

   Väljastatud kaherealistest maatriksitest yh ja $yh2$ läheb vaja viimase veeru väärtusi.

5. Arvutame ligikaudse sammul tekkiva vea

$$E = \frac{\|y^h - y^{h/2}\|}{2^k - 1},$$

   kus k on meetodi järk ja normi jaoks tuleb kasutada ühte vektori normi käskudest, näiteks vektori v jaoks

$$\text{norm(v,2)}\ \text{, sama mis}\ \mathbf{l_2}\ \text{norm}\ \|\mathbf{v}\|_\mathbf{2} = \left(\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} |\mathbf{v_k}|^\mathbf{2} \right)^{\mathbf{1/2}}.$$

   Märgime, et praktikas on kasulik võtta E vähemalt 10 korda suuremaks (tasandamaks kuhjuvaid ümardamisvigu).

6. (a) Kui tingimus

$$E \leq \varepsilon \cdot \|y^{h/2}\|$$

   ei kehti, siis vähendame sammu pikkust 2 korda ja läheme „while“ tsükliga lihtsalt edasi (mitte midagi muud tegemata), sisuliselt punkti 3. juurde tagasi.

   (b) Kui kehtib tingimus

$$E \leq \varepsilon \cdot \|y^{h/2}\|,$$

   siis leitud lähislahend sobib ja me lisame sõlme $tt + h$ ning lähislahendi $y^{h/2}$ vastava maatriksi lõppu.

```
if E <= epsilon*norm( yh2( : , $ ) , 2 ) then
    t = [ t , tt+h ]
    y = [ y , yh2( : , $ ) ]
end
```

   (c) Lisaks, kui

$$E \leq \varepsilon \cdot \frac{\|y^{h/2}\|}{10},$$

   siis suurendame enne 3. punkti juurde naasmist (ehk enne „while“ tsükli jätkamist) sammu pikkust 2 korda (lisades vastava *if*-lause).

7. Lõpuks, pärast „while“ tsükli lõppu on meil sõlmede vektor t ja lähislahendite vektor y, mille protseduuris väljastamegi.

5.3 Praktikumi ülesanne

Ülesanne 5.1

1. Kasutades Runge-Kutta 4. järku meetodit, lahendage võrrandisüsteem (5.2) relatiivse veaga $\varepsilon = 10^{-5}$ (kasutades Runge võtet ehk lõigu poolitamise võtet). Algsammuks võib võtta $h = 1$. Arvestades järgnevat, tuleks kirjutada sellekohane protseduur. Probleem võib tulla liikme $y(x) - (Ax + B)$ võrdumisel nulliga.
2. Kandke ühele graafikule piraatide ja kaubalaeva läbitud trajektoorid.
3. Märgime, et kaubalaeva koordinaadid $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ on avaldatavad valemitega
$$\tilde{x}_i = \frac{B - y_i + y_i' \cdot x_i}{y_i' - A}, \quad \tilde{y}_i = A\tilde{x}_i + B.$$
4. Alati saab sirge $y = Ax + B$ parameetri B leida seosest $B = K_y - A \cdot K_x$.
5. Olgu alguses,
$$v_p = 1.2, \quad v_k = 1, \quad A = 30, \quad P(-15, -10), \quad K(12, 30), \quad x \in [-15, 5].$$
6. Kaubalaev muudab suunda ja piraatide laevaga juhtub tehniline äpardus,
$$v_p = 1, \quad v_k = 1.2, \quad A = 2, \quad P(x(\$), y(\$)), \quad K(\tilde{x}(\$), \tilde{y}(\$)), \quad x \in [5, 25].$$
7. Kaubalaev muudab suunda,
$$v_p = 1.1, \quad v_k = 1, \quad A = 10, \quad P(x(\$), y(\$)), \quad K(\tilde{x}(\$), \tilde{y}(\$)), \quad x \in [25, 45].$$
8. Kaubalaev muudab suunda ja kogub kiirust,
$$v_p = 1, \quad v_k = 1.5, \quad A = -1, \quad P(x(\$), y(\$)), \quad K(\tilde{x}(\$), \tilde{y}(\$)), \quad x \in [45, 65].$$
9. Kaubalaev muudab suunda, piraadid kiirendavad,
$$v_p = 1.7, \quad v_k = 1, \quad A = 10, \quad P(x(\$), y(\$)), \quad K(\tilde{x}(\$), \tilde{y}(\$)), \quad x \in [65, 85].$$

Ülesanne 5.2

Kui eelnev peaks olema keeruline või jääb aega üle, siis võib tulemust kotrollida ülesandega

$$\left\{ \begin{array}{cl} y' & = y + z \\ z' & = -y + z \\ y(0) & = 1, \quad z(0) = 0 \end{array} \right\},$$

mille täpseks lahendiks on funktsioonid

$$y(x) = e^x \cdot \cos(x), \quad z(x) = -e^x \cdot \sin(x).$$

Võtke relatiivseks veaks $\varepsilon = 10^{-10}$ ja $[a, b] = [0, 3]$. Mitu sõlme arvutamisel kasutatakse? Milline on täpse lahendi ja lähislahendi tegelik viga ($\|y_* - y(x)\|_2$) sõlmedes?