9 Fredholm'i II liiki integraalvõrrand

Vaatleme võrrandit

$$u(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi x t}{2}\right) u(t)\,dt = x^3, \quad x \in [-1, 1]. \tag{9.1}$$

9.1 II liiki lineaarse Fredholm'i integraalvõrrandi lahendamine kvadratuursummade meetodiga

1. Vaatleme lineaarset Fredholm'i II liiki integraalvõrrandit

$$u(x) = \int_{a}^{b} K(x, s) \cdot u(s)\,ds + f(x), \quad x \in [a, b]. \tag{9.2}$$

2. Valime osalõikude arvu N ja moodustame ühtlaselt paiknevad sõlmed

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N = b, \quad x_i = a + h \cdot (i - 1), \quad i = 1, \ldots, N, \quad h = \frac{b-a}{N-1}.$$

3. Asendame integraali sobiva kvadratuurvalemiga,

$$\int_{a}^{b} G(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{N} w_j \cdot G(x_j), \tag{9.3}$$

kus näiteks trapetsvalemi korral kaalud avalduvad seostega

$$w_1 = \frac{h}{2}, \quad w_2 = h, \quad \ldots, \quad w_{N-1} = h, \quad w_N = \frac{h}{2}. \tag{9.4}$$

4. Kirjutades esialgse võrrandi välja sõlmedes $x_1, \ldots, x_N$ ja asendades integraali kvadratuurvalemiga, saame lineaarvõrrandite süsteemi tundmatute $u_1, \ldots, u_N$ suhtes ($u_i = u(x_i)$):

$$u_i - \sum_{j=1}^{N} w_j \cdot K(x_i, x_j) \cdot u_j = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{9.5}$$

5. Programmis SciLab võib lineaarvõrrandite süsteemi $Au = F$ lahendamiseks viia läbi järgmise skeemi:

```
A = zeros( N , N )    // Süsteemi maatriks
F = zeros( N , 1 )    // Vabaliige
for i = 1 : N
    F( i ) = f( x(i) )
    for j = 1 : N
        A( i , j ) = w( j )*K( x(i) , x(j) )
    end
end
A = eye( N , N ) - A // Diagonaalil on lisaks ühed.
u = linsolve( A , -F ) // Lahendab süsteemi Au+F=0
```

9.2 Praktikumi ülesanne

1. Kirjutage protseduur Fredholm'i II liiki võrrandi lahendamiseks.
2. Lahendage võrrand (9.1) kvadratuursummade meetodiga, kasutades trapetsvalemit. Koostage lähislahendi graafik.
3. Kui suur on lähislahendite erinevus osalõikude arvu $N = 16$ ja $N = 256$ korral?