

1 Algtingimustega ülesanded

Sisukord

1 Algtingimustega ülesanded	1
1.1 Mõned põhimõisted	2
1.2 Cauchy ülesande seade	3
1.3 Cauchy ülesande lahendi olemasolu ja ühesus	5
1.4 I järku harilikud lineaarsed võrrandid *	9
1.5 Euler'i meetod	11
1.6 I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemid *	14
1.7 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid *	15

Märksõnad

1. Cauchy ülesande seade (definiitsioon).
2. Lahendi olemasolu ja ühesus. Peano teoreem, Cauchy teoreem.
3. Funktsiooni Lipschitz-pidevus.
4. Lahendi ühesus Lipschitz-pidevuse kaudu.
5. Euler'i meetod.

1.1 Mõned põhimõisted

Tuntud mõistete definitsioonid võib leida õpikust [2].

Definitsioon 1.1

Me ütleme, et funktsioon f on pidev kohal a , kui

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definitsioon 1.2

Olgu funktsioon f määratud piirkonnas D ja olgu x selle piirkonna sisepunkt. Piirväärtust

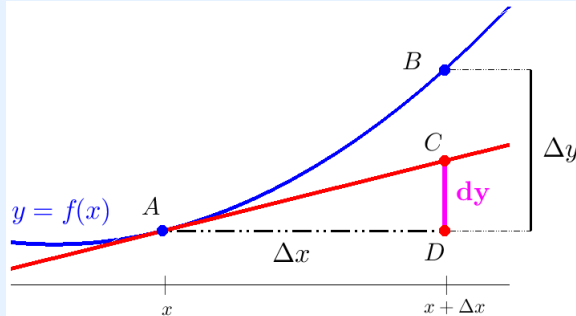
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.1)$$

nimetatakse funktsiooni f tuletiseks kohal x ja tähistatakse $f'(x)$. Kui funktsioonil f on lõplik tuletis kohal x , siis öeldakse, et funktsioon f on diferentseeruv kohal x .

Diferentseeruv funktsioon on alati pidev samas punktis.

Definitsioon 1.3

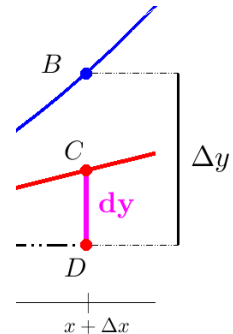
Suurust $f'(x)\Delta x$ nimetatakse funktsiooni diferentsiaaliks kohal x argumenti muudu Δx korral ja tähistatakse $df(x)$.



Seega $y = f(x)$ korral $dy = f'(x)dx$ ehk lõplikku tuletist saab vaadelda kui diferentsiaalide jagatist

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Funktsiooni muudu Δy asendamisel diferentsiaaliga dy teeme vea, mille suurus on lõigu BC pikkus.



Näidaku funktsioon $y = f(t)$ objekti liikumist ajas, tema teepikkuse muutumist. Lagrange'i teoreem ütleb, et teatud tingimustel leidub selline moment ($t = c$), mil objekti hetkkiirus $f'(c)$ on võrdne objekti keskmise kiirusega $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ üle lõigu $[a, b]$.

Teoreem 1.1

Lagrange'i keskvaartusteoreem. Kui funktsioon f on pidev lõigus $[a, b]$ ja diferentseeruv vahemikus (a, b) , siis leidub vähemalt üks punkt $\xi \in (a, b)$, mille korral

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \xi \in (a, b). \quad (1.2)$$

Olgu $P = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ funktsiooni $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ määramispiirkonna D sisepunkt. Anname argumentidele x_i muudu Δx_i , nii et

$$Q = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) \in D.$$

Definitsioon 1.4

Kui leidub piirväärtus

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\Delta x_i}, \quad (1.3)$$

siis seda nimetatakse funktsiooni $z = f(x_1, \dots, x_m)$ osatuletiseks muutuja x_i järgi punktis P .

Definitsioon 1.5

Funktsiooni $z = f(P)$ nimetatakse pidevaks punktis A , kui

$$\lim_{P \rightarrow A} f(P) = f(A).$$

Märkus 1.1

Mitme muutuja elementaarfunktsioonid on funktsioonid, mis saadakse põhilistest elementaarfunktsioonidest, rakendades lõplikku arvu aritmeetilisi tehteid ja liitfunktsiooni moodustamist.

Lause 1.1

Kõik mitme muutuja elementaarfunktsioonid on pidevad oma määramispiirkonnas.

1.2 Cauchy ülesande seade

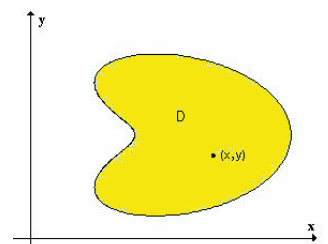
Diferentsiaalvõrrandeid kasutatakse süsteemide modelleerimiseks, mudelite käitumise analüüsiks, ja näiteks tulemuste või käitumise ennustamiseks. Me alustame oma loengusarja kõige lihtsamast: algtingimusega ehk Cauchy ülesandest, mille kohta leiab teoreetilist materjali näiteks õpikust [3].

Piirkonna D all mõtleme me edaspidi **lahtist** sidusat piirkonda.

Olgu võrrandi

$$y' = f(x, y)$$

parem pool $f(x, y)$ määratud muutujate x, y piirkonnas D ning olgu x_0 ja y_0 mingid etteantud arvud, mille korral punkt (x_0, y_0) kuulub piirkonda D .



Definitsioon 1.6

Ülesannet, kus on vaja leida diferentsiaalvõrrandi

$$y' = f(x, y) \quad (1.4)$$

lahend $y = y(x)$, mis argumendi väärtusel $x = x_0$ omandab väärtuse $y = y_0$, s.t. rahuldab tingimust

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.5)$$

nimetatakse algtingimusega ehk **Cauchy ülesandeks** võrrandi (1.4) jaoks. Lisatingimust (1.5) nimetatakse algtingimuseks ehk Cauchy tingimuseks.

Näide 1.1 Bioloogilise liigi arvukus (vt. [3]). Olgu $y(t)$ mõne liigi isendite (näiteks teatud bakterite) arv ajamomendil t .

Malthuse seadus ütleb, et liigi arvukuse muutumise kiirus $y'(t)$ on võrdeline isendite arvuga:

$$\frac{dy}{dt} = k y,$$

või teisiti

$$y'(t) = k y(t),$$

kus k on võrdetegur. Sõltuvalt keskkonnast, näiteks toiduainete kättesaadavusest, on k positiivne (keskkond soodustab paljunemist). Kui näiteks toitu on vähe, siis k on negatiivne.

Antud võrrandiga $y'(t) = k y(t)$ kirjeldatakse liigi arvukuse muutumise kiirust igal ajamomendil t , otsitavaks on liigi arvukus $y(t)$ ise.

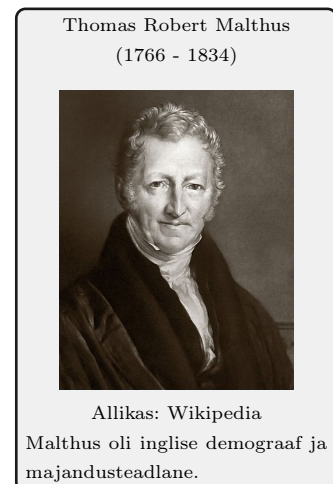
Diferentsiaalvõrranditel on tavaliselt lõpmata arv lahendeid. Selleks, et ülesanne oleks korrektselt püstitatud ja saaks välja valida meie mudelile sobiva(d) lahendi(d), peab olema toodud lisaks veel mingi algtingimus, s.t. antud olukorras bakterite arv mingil algmomendil $t = t_0$. Tihti võib algmomendi võtta $t_0 = 0$. Näiteks võib siis algtingimuseks olla $y(0) = 10^6$ bakterit mingis keskkonnas.

Märgime, et algtingimuse $y(0) = y_0$ korral on meie esialgse võrrandi täpseks lahendiks

$$y(t) = y_0 e^{kt}.$$

Näeme, et $k > 0$ korral toimub liigi eksponentsiaalne kasv ja $k < 0$ korral liigi eksponentsiaalne kahanemine.

◇ ◇ ◇



Näide 1.2 Näiteks on Cauchy ülesande

$$\begin{cases} y' = y \\ y(1) = 2 \end{cases}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

üldlahend vahetult välja kirjutatav kujul

$$y(x) = C e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Algtingimusest $y(1) = 2$ saame välja arvutada konstandi C :

$$2 = C e^1 \Rightarrow C = 2/e$$

ja Cauchy ülesande ainsaks lahendiks on

$$y(x) = 2 e^{x-1}.$$

◇ ◇ ◇

1.3 Cauchy ülesande lahendi olemasolu ja ühesus

Cauchy ülesande (1.4),(1.5) lahendi olemasolu kohta kehtib Peano teoreem.

Mölemas järgmises teoreemis on piirkond D lahtine ja sidus.

Teoreem 1.2

Peano teoreem, [3]. Olgu $f(x, y)$ pidev muutujate x, y piirkonnas D . Siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb vähemalt üks võrrandi $y' = f(x, y)$ integraalkõver ehk Cauchy ülesandel (1.4),(1.5) on vähemalt üks lahend.

Teoreem annab meile teada, et pideva funktsiooni korral omab võrrandi lahendamise mõtet, kuna lahend eksisteerib.

Cauchy ülesande (1.4),(1.5) lahendi ühesuse kohta kehtib Cauchy teoreem.

Teoreem 1.3

Cauchy teoreem, [3]. Kui $f(x, y)$ ja selle osatuletis y järgi $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ on määratud ja pidevad muutujate x, y piirkonnas D , siis läbi iga punkti $(x_0, y_0) \in D$ kulgeb parajasti üks võrrandi $y' = f(x, y)$ integraalkõver ehk Cauchy ülesandel (1.4),(1.5) on parajasti üks lahend.

Lahendi ühesus on väga oluline ka ligikaudse lahendamise korral. Kui lahend ei ole ühene, siis ei pruugi numbrilised arvutused koonduda.

Näide 1.3 Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$y' = 3y^{2/3}.$$

Lihtne on näha, et funktsioon $f(x, y) = y^{2/3}$ on pidev kogu xy -tasandil. Peano teoreemi järgi läbib xy -tasandi igat punkti vähemalt üks algvõrrandi lahend (neid võib olla rohkem kui üks).

Tuletis y järgi

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y^{-1/3} = \frac{2}{y^{1/3}}$$

on määratud ja pidev, kui $y \neq 0$. Kui $y < 0$ või $y > 0$, siis Cauchy teoreemi järgi läbib piirkonna D igat punkti (x_0, y_0) ainult üks lahend.

Kui $y = 0$ (ehk y võrdub x -teljega), siis lahend ei pruugi olla ühene. Vahetult võib kontrollida, et iga suvalise väärtuse $x_0 \in (-\infty, \infty)$ korral läbib x -telje punkti $(x_0, 0)$ vähemalt kaks erinevat võrrandi lahendit: $y(x) = 0$ ja $y(x) = (x - x_0)^3$.

◇ ◇ ◇

Järgnevalt toome sisse Lipschitz-pideva funktsiooni mõiste (vt. [4]).

Definitsioon 1.7

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse **Lipschitz-pidevaks** intervallis X , kui leidub selline lõplik arv $L \geq 0$, et kehtib nn. Lipschitz'i tingimus

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2| \quad (1.6)$$

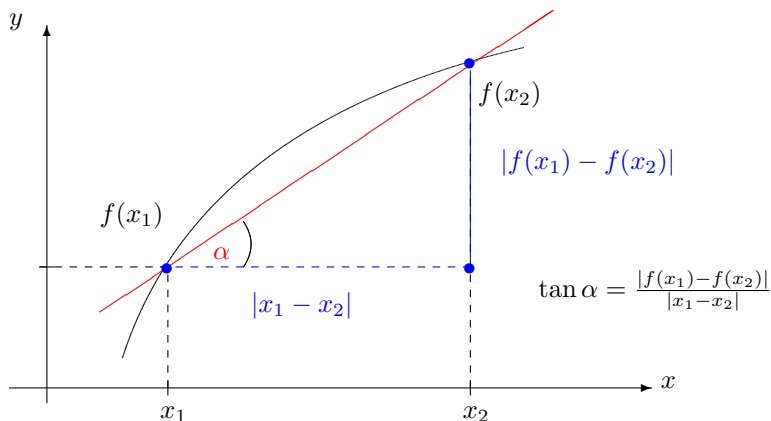
iga punkti x_1 ja x_2 korral intervallist X . Antud arvu L nimetatakse ka **Lipschitz'i konstandiks**.

Märkus 1.2

Kirjutame tingimuse (1.6) ümber kujule

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq L, \quad x_1 \neq x_2.$$

Lipschitz'i tingimus (1.6) tähendab seda, et kõikide funktsiooni f graafiku kahte punkti omavahel ühendavate sirglõikude tõusud on tõkestatud ning selleks tõkkeks on L . Teisiti öeldes, ükskõik kui lähedal või kaugel üksteisest punktid x_1 ja x_2 ka ei oleks, siis vastavad funktsiooni f väärtused ei kasva liiga kiiresti.



Rudolf Otto Sigismund
Lipschitz
(1832 - 1903)



Allikas: Wikipedia

Omadus on nime saanud saksa matemaatiku Rudolph Lipschitz'i järgi, kes kasutas Lipschitz-pidevust diferentsiaalvõrrandite lahendi olemasolu tõestustes.

Märkus 1.3

Funktsiooni Lipschitz-pidevus on kitsam mõiste kui funktsiooni pidevus. Iga Lipschitz-pidev funktsioon on pidev selles samas intervallis X , kuid vastupidine üldjuhul ei kehti.

Näide 1.4 Näitame, et $y = x^2$ on Lipschitz-pidev lõigul $[-2, 2]$. Iga suvalise kahe punkti $x_1, x_2 \in [-2, 2]$ korral võime kirjutada

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq 4|x_1 - x_2|.$$

Saime, et Lipschitz'i konstant $L = 4$ ja seega ei kasva funktsiooni $y = x^2$ graafiku punkte ühendavad kõõlad järsema kui $\arctan(4) \approx 76^\circ$ kraadi all. Loomulikult sobib Lipschitz'i konstandiks ka iga suurem arv M , kuna

$$|y(x_1) - y(x_2)| \leq 4|x_1 - x_2| \leq M|x_1 - x_2|, \quad M \in [4, \infty).$$

Märgime, et tervel reaalteljel pidev funktsioon $y = x^2$ ei ole Lipschitz-pidev lõigul $(-\infty, \infty)$, kuna suurus $|x_1 + x_2|$ ei ole seal tõkestatud ja meil ei õnnestu leida lõplikku Lipschitz'i konstanti L .

◇ ◇ ◇

Näide 1.5 Vaatleme lõigul $[0, 1]$ pidevat funktsiooni $y(x) = \sqrt{x}$. Kirjutame,

$$|y(x_1) - y(x_2)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{1}{|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}|} |x_1 - x_2|.$$

Näeme, et ei ole võimalik leida tõket suurusele $\frac{1}{|\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}|}$ ja seega funktsioon $y(x) = \sqrt{x}$ ei rahulda Lipschitz'i tingimust (1.6).

◇ ◇ ◇

Definitsioon 1.8

Kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ nimetatakse Lipschitz-pidevaks muutuja y järgi ristkülikus $S = [a, b] \times [\alpha, \beta]$, kui leidub selline lõplik arv $L \geq 0$, et kehtib nn. Lipschitz'i tingimus

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (1.7)$$

iga punkti (x, y_1) ja (x, y_2) korral piirkonnast S .

Näide 1.6 Leida funktsiooni

$$f(x, y) = 2xy - x^5, \quad x \in [0, 1]$$

Lipschitz'i konstant.

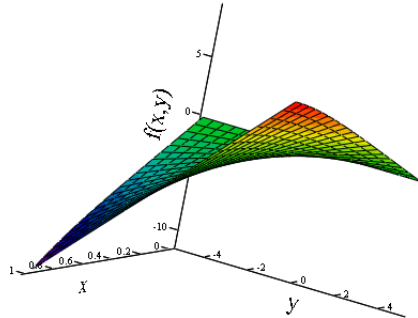
Lahendus. Kirjutame

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |2xy_1 - x^5 - (2xy_2 - x^5)| = |2x(y_1 - y_2)| = 2|x||y_1 - y_2|.$$

Näeme, et iga punkti (x, y_1) ja (x, y_2) korral piirkonnast $[0, 1] \times (-\infty, \infty)$ saame hinnata

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$$

ja seega funktsiooni f Lipschitz'i konstant $L = 2$ ning funktsioon f on Lipschitz-pidev antud piirkonnas.



◇ ◇ ◇

Ülesanne. Leida järgmistele funktsioonide Lipschitz'i konstant (kui see leidub):

$$f(t, y) = t,$$

$$f(t, y) = -y,$$

$$f(t, y) = -y^3.$$

Märkus 1.4

Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidevalt diferentseeruv muutuja y järgi, siis

$$\max_{(x,y) \in D} \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right|$$

on funktsiooni f üheks Lipschitz'i konstandiks. Viimane järeljub Lagrange'i keskvaartusteoreemist, kus fikseeritud x korral leidub $\xi \in (y_1, y_2)$ nii, et kehtib võrdus

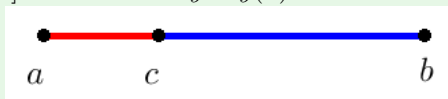
$$\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, \xi).$$

Teoreem 1.4

Birkhoff ja Rota 1989, [4]. Olgu funktsioon $f(x, y)$ Lipschitz-pidev muutuja y järgi ristkülikus $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ ja olgu $\alpha < y_0 < \beta$. Siis leidub $c \in (a, b)$, nii et Cauchy ülesandel

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0 \tag{1.8}$$

leidub lõigus $[a, c]$ ühene lahend $y = y(x)$.



Veel enam, kui f on Lipschitz-pidev muutuja y järgi piirkonnas

$$[a, b] \times (-\infty, \infty),$$

siis leidub lõigus $[a, b]$ ühene lahend $y(x)$.

Teoreemi hoolikas lugemine on tähtis. Rõhutame, et funktsiooni $f(x, y)$ Lipschitz-pidevus ristkülikus ei garanteeri Cauchy ülesande ühest lahendit terves lõigus $[a, b]$, vaid ainult osalõigus $[a, c] \subset [a, b]$.

See saab eriti oluliseks ülesannete ligikaudsel lahendamisel, kus arvutusvead võivad anda meile y väärtusi, mis jäävad y -telje lõigust $[\alpha, \beta]$ väljapoole.

Ühese lahendi kogulõigus $[a, b]$ garanteerib Lipschitz-pidevus terves piirkonnas

$$[a, b] \times (-\infty, \infty).$$

Seda ei ole aga alati lihtne kontrollida.

Näide 1.7 Vaatleme algtingimusega ülesannet

$$y'(x) = y^2(x), \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2].$$

Leiame Lipschitz'i konstandi L osatuletise abil,

$$L := \max_{(x,y) \in [0,2] \times [-10,10]} \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) \right| = \max_{(x,y) \in [0,2] \times [-10,10]} |2y| = 20.$$

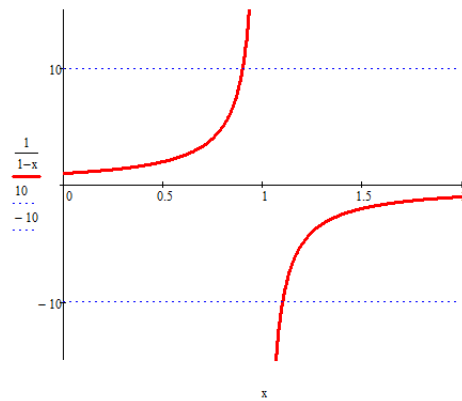
Seega Lagrange'i keskvaartusteoreemist saame, et

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 20 |y_1 - y_2|,$$

ja f on Lipschitz-pidev ristkülikus $[0, 2] \times [-10, 10]$. Teoreem ütleb meile, et vaadeldaval Cauchy ülesandel leidub ühene lahend y mingis osalõigul $[0, c] \subset [0, 2]$, kuid ei garanteeri veel ühest lahendit terves lõigul $[0, 2]$.

Osutub, et ülesande täpne ja ühene lahend on

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \in [0, 2] \setminus \{1\}.$$



Näeme, et y on katkev punktis $x = 1$ ja kasvab tõkestamatult $x = 1$ ümbruses (seega ei leidu lahendit, mis oleks määratud terves lõigul $[0, 2]$). Lipschitz'i konstant $L = 20$ kehtib ainult lõigu $y \in [-10, 10]$ korral ja y väärtused kasvavad suuremaks kui 10 enne, kui x jõuab väärtuseni $x = 2$.

◇ ◇ ◇

1.4 I järku harilikud lineaarsed võrrandid *

Vaatleme meeldetuletuseks ühte klassi diferentsiaalvõrrandeid - I järku harilikke lineaarsed võrrandeid - mille täpne lahendamine on suhteliselt lihtne (vt. [3, 4]) ja mis on abiks näidete koostamisel või analüüsimisel. Seega, vaatleme Cauchy ülesannet

$$y' = g(x)y + h(x), \quad y(a) = y_a, \quad x \in [a, b]. \quad (1.9)$$

Esiteks märgime, et kui g on pidev lõigul $[a, b]$, siis $f(x, y)$ on Lipschitz-pidev muutuja y järgi.

Lisame, et Peano teoreem annab meile info, et vaadeldaval Cauchy ülesandel on olemas vähemalt üks lahend. Cauchy teoreem täpsustab, et lahend on ühene. Siiski, mõlemad teoreemid räägivad meile lahendist, mis läbib punkti $(x_0, y_0) = (0, 1)$ ja ei täpsusta, kuidas lahend edasi käitub (lahend leidub lõigul $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ mingi väikese $\delta > 0$ jaoks).

Teoreem 1.4 ütleb lahendi kohta mingis mõttes rohkemat (et lahend on ühene ja seda tervel lõigul $[0, c]$), kuid samas mitte ka palju rohkem (kuna seda tundmatut konstanti c me ju ei tea). Kui suudaksime näidata funktsiooni $f(x, y)$ Lipschitz-pidevust terves piirkonnas $[a, b] \times (-\infty, \infty)$, siis ütleks teoreem 1.4 lahendi kohta juba oluliselt rohkem.

Seda peame võtma arvesse ka ligikaudsel lahendamisel. Punktist $x = 1$ paremal pool olevat lahendi osa me enam kätte ei saaks.

Ülesanne. Vaatleme Cauchy ülesannet $(x \in [-\pi, \pi])$

$$y' = \sin(y), \quad y(-\pi) = 3.$$

Millisel $[-\pi, \pi]$ osalõigul leidub ülesandel ühene lahend?

Nimelt,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |g(x)(y_1 - y_2)| = |g(x)||y_1 - y_2| \leq \max_{x \in [a, b]} |g(x)||y_1 - y_2|.$$

Kui g on pidev lõigul $[a, b]$, siis ta on tõkestatud ja sobib võtta $L = \max_{x \in [a, b]} |g(x)|$. Järelikult $f(x, y)$ on Lipschitz-pidev piirkonnas $[a, b] \times (-\infty, \infty)$ ja teoreemi 1.4 järgi leidub Cauchy ülesandel (1.9) ühene lahend tervel lõigul $[a, b]$.

Ülesanne. Leidke Cauchy ülesande

$$y' = t + y, \quad y(0) = 0$$

täpne lahend.

Lahend y leitakse järgmise trikiga. Korrutame võrrandit (1.9) läbi integreerimisteguriga $e^{-\int g(x) dx}$ ja viime funktsiooni $g(x)$ sisaldava liikme võrduse vasakule poolele,

$$y'(x)e^{-\int g(x) dx} - y(x)g(x)e^{-\int g(x) dx} = e^{-\int g(x) dx} h(x). \quad (1.10)$$

Viimase avaldise vasak pool kujutab endast korrutise tuletist,

$$\left(y(x)e^{-\int g(x) dx} \right)' = e^{-\int g(x) dx} h(x). \quad (1.11)$$

Integreerime mõlemat poolt,

$$y(x)e^{-\int g(x) dx} = \int e^{-\int g(x) dx} h(x) dx. \quad (1.12)$$

Siit saab avaldada lahendi

$$y(x) = e^{\int g(x) dx} \cdot \int e^{-\int g(x) dx} h(x) dx. \quad (1.13)$$

Kui mingi konkreetse ülesande korral saab integreerimistegurit $e^{-\int g(x) dx}$ lihtsalt leida, siis on ka lahendi y leidmine lihtne.

Näide 1.8 Vaatleme algtingimustega ülesannet

$$y' = xy + x^3, \quad y(0) = 1.$$

Funktsioon $g(x) = x$ ja integreerimisteguriks sobib

$$e^{-\int g(x) dx} = e^{-\int x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Siin võtsime määramata integraalis konstandi $C = 0$. Edasi saame leida lahendi y ,

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} x^3 dx = 2e^{\frac{x^2}{2}} \int e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{x^2}{2} d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Teeme muutujavahetuse $t = \frac{x^2}{2}$ ja integreerime ositi,

$$y = 2e^t \int e^{-t} t dt = 2e^t \left(-te^{-t} + \int e^{-t} dt \right) = 2e^t (-te^{-t} - e^{-t} + C).$$

Asendame tagasi $t = \frac{x^2}{2}$,

$$y(x) = -x^2 - 2 + 2C e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Leiame algtingimuse $y(0) = 1$ abil konstandi C ,

$$1 = -0 - 2 + 2C e^0 = 2C - 2 \Rightarrow C = \frac{3}{2}.$$

Vastus:

$$y(x) = 3e^{\frac{x^2}{2}} - x^2 - 2.$$

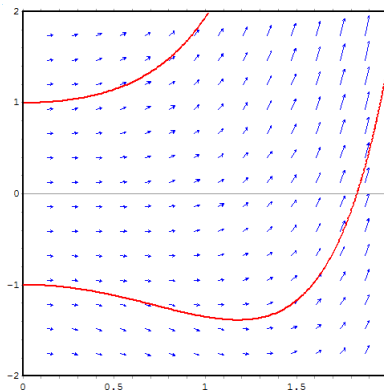
◇ ◇ ◇

1.5 Euler'i meetod

Alustame näitega. Vaatleme järgmist algtingimusega ülesannet:

$$y' = xy + x^3, \quad y(0) = y_0, \quad x \in [0, 2]. \quad (1.14)$$

Diferentsiaalvõrrandit võib endale ette kujutada ka kui vektorvälja, kus igas tasandi punktis (x, y) on joonestatud vektor tõusunurga tangensiga $y' = f(x, y)$. Järgmisel joonisel ongi joonestatud ülesandele (1.14) vastav vektorväli (tõsi, veidi „hõreda“ võitu) koos kahe erineva lahendiga.



Algtingimusele $y(0) = 1$ vastab ülemine joon, mis läbib „alguspunkti“ $(0, 1)$. Teisele algtingimusele $y(0) = -1$ vastab alumine joon, mis läbib „alguspunkti“ $(0, -1)$.

Siit tekib ka idee: lahendada võrrandit $y' = f(x, y)$ nii, et alustame alguspunktist (x_0, y_0) ja liigume kogu aeg edasi mööda vektoreid. Vektori tõusunurga arvutamiseks ei ole mingeid probleeme, kuna tõusunurga tangens võrdub funktsiooni y tuletisega antud punktis, viimane on aga antud, s.t. me saame kasutada seda sama arvutuseeskirja $y' = f(x, y)$.

Sel juhul **lahendi täpsus sõltub sellest, kui väikeste lõikude kaupa** (kui lühikeste või pikkade vektorite kaupa) me edasi liigume. Peame arvestama, et kui me valime liiga suured sammud, siis me võime „maha magada“ lahendi

kiire muutumise (kuna me liigume mööda vektorit, samal ajal kui kuskil poole tee peal oleksime pidanud peatuma ja arvutama uue järsema tõusunurga ning liikuma edasi juba uue vektori suunal).

Teisalt, **valides liiga väikesed sammud, peame tegema üleliia palju arvutusi** ja viimane ei pruugi arvutusaega silmas pidades olla just kõige mõistlikum teguviis. Pealegi on arvutustäpsus arvutites piiratud ja liialt väikseid samme ei saagi valida. Selline võrrandi lahendamise idee on kirja pandav Euler'i meetodiga, mille üldise algoritmi sõnastame natukese aja pärast.

Ülesanne. Lahendage diferentsiaalvõrrand

$$y' = t + y$$

Euler'i meetodiga, kui $y(0) = 0$ ja $t \in [0, 1]$. Kasutage $h = \frac{1}{4}$. Kirjutage välja lähisväärtused y_i , $i = 0, \dots, 4$ ja võrrelge tulemust täpse lahendiga punktis $t = 1$.

Näide 1.9 Vaatame esiteks, kuidas Euler'i meetodit rakendada konkreetse ülesande peal, näiteks

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2].$$

Märgime, et ülesande täpne lahend on

$$y(x) = e^{-x} \int x e^x dx = 2e^{-x} + x - 1.$$

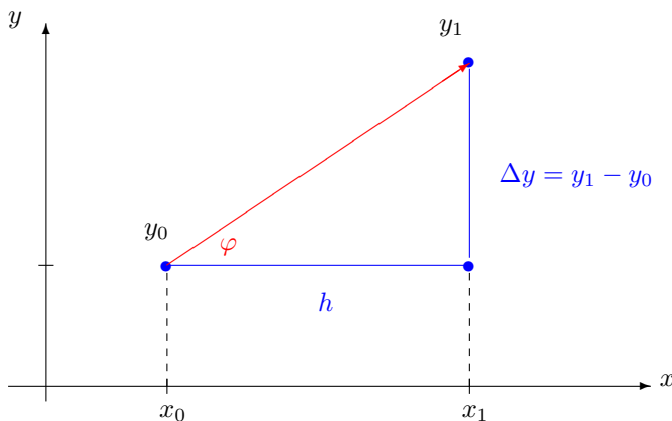
Viimast kasutame illustreerimaks Euler'i meetodi käitumist täpse lahendi suhtes.

Jagame lõigu $[0, 2]$ neljaks võrdseks osaks. Sel juhul sammupikkus $h = 1/2$ ja me saame sõlmed

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = \frac{3}{2}, \quad x_4 = 2.$$

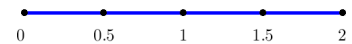
Kui punktis x_0 on lahendi väärtus y_0 , siis liikudes mööda vektorit, satume punkti (x_1, y_1) . Sel juhul vektori tõusunurga tangens on arvutatav kui

$$\tan(\varphi) = \frac{\Delta y}{h} = y'(x_0).$$



Siit võime kirjutada

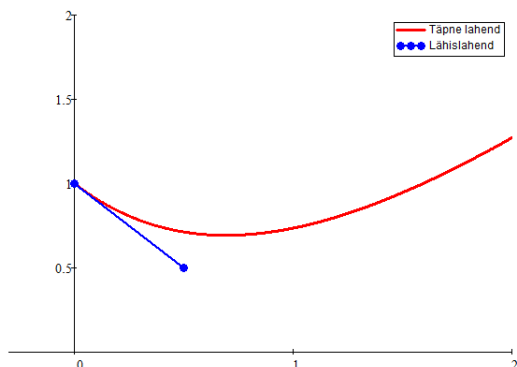
$$\Delta y = h y'(x_0) = h f(x_0, y_0)$$



ja liikudes mööda vektorit jõuame punkti (x_1, y_1) , kus

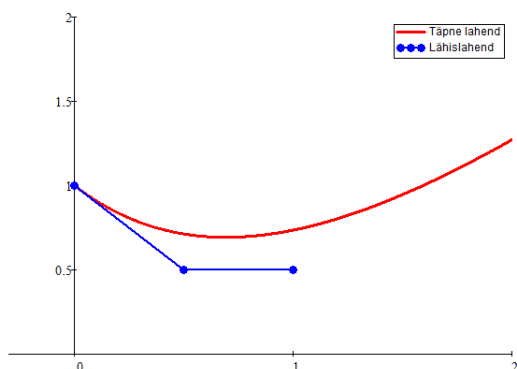
$$y_1 = y_0 + \Delta y = y_0 + h f(x_0, y_0).$$

Sedasi jätkame, kuni jõuame punkti (x_4, y_4) .



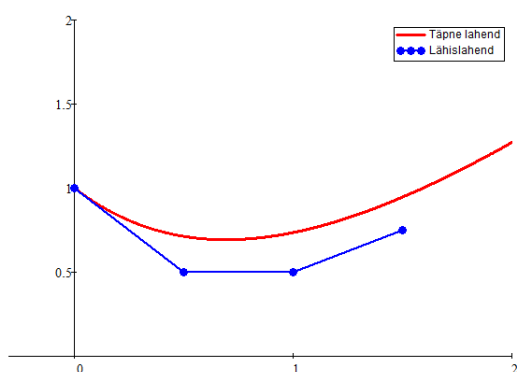
$$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(0 - 1) = \frac{1}{2}$$



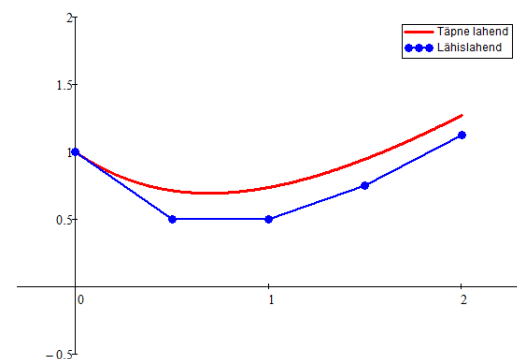
$$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



$$y_3 = y_2 + h f(x_2, y_2)$$

$$y_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$



$$y_4 = y_3 + h f(x_3, y_3)$$

$$y_4 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) = \frac{9}{8}$$

Ülesanne. Lahendage arvuti abiga diferentsiaalvõrrand

$$y' = \sin(y)$$

Euler'i meetodiga, kui $y(0) = 100$. Lahendage ülesanne lõigul $[0, 4]$ kasutades erinevaid sammupikkusi

$$h = \frac{2^{-k}}{10}, \quad k = 1, \dots, 5.$$

Võrrelge ühel graafikul $k = 1$ ja $k = 5$ korral leitud lähislahendeid.

Täpsema lahendi saamiseks peaksime võtma rohkem sõlmi ja seega tegema ka rohkem arvutusi.

Saadud murdjoont, mis ühendab punkte $(0, 1)$, $(0.5, 1/2)$, $(1, 1/2)$, $(1.5, 3/4)$ ja $(2, 9/8)$, nimetatakse ka Euler'i murdjooneks.

Üldjuhul võime **Euler'i meetodit** rakendada järgmiselt (vt. [1, 3, 4, 5]).

Esiteks valime sammupikkuse h ja seejärel moodustame sõlmed

$$x_i = x_0 + i h, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.15)$$

Igale sõlmele vastab lähislahend y_i , mille arvutame eeskirjaga

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

1.6 I järku diferentsiaalvõrrandite süsteemid *

Olgu meil antud m võrrandist koosnev harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} z'_1(x) = f_1(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \\ z'_2(x) = f_2(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \\ \dots \\ z'_m(x) = f_m(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \end{array} \right\} \quad (1.17)$$

koos algtingimustega

$$z_1(x_0) = u_0^1, \quad \dots, \quad z_m(x_0) = u_0^m. \quad (1.18)$$

Tähistades otsitavate funktsioonide $z_1(x), \dots, z_m(x)$ väärtusi sõlmedes x_0, \dots, x_N , $N \in \mathbb{N}$ järgmiselt:

$$z_1(x_i) = z_{1,i}, \dots, z_m(x_i) = z_{m,i}, \quad i = 0, \dots, N,$$

saame näiteks Euler'i meetodit kasutades välja kirjutada

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1,i+1} = z_{1,i} + h f_1(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{m,i}) \\ z_{2,i+1} = z_{2,i} + h f_2(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{m,i}) \\ \dots \\ z_{m,i+1} = z_{m,i} + h f_m(x_i, z_{1,i}, z_{2,i}, \dots, z_{m,i}) \end{array} \right\}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1.19)$$

Viimane on vektorkujul lihtsalt kirja pandav,

$$Z_{i+1} = Z_i + h \cdot F(x_i, Z_i), \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (1.20)$$

Leonhard Paul Euler
(1707 - 1783)



Johann Georg Brucker'i portree
Leonhard Euler'ist
(Allikas: Wikipedia)

Euler kasutas seda valemit juba 1768. aastal.

Kuna Euler viibis enamuse oma täiskasvanu east Sankt-Peterburg'is, siis kohati nimetatakse teda ka vene matemaatikuks. Leonhard Euler'it on nimetatud ka kui läbi aegade kõige olulisemaks matemaatikuks (see viimane teema on muidugi väga subjektiivne).

Euler'i meetodit on kerge programmeerida ja lihtsamal juhul teeb ta oma töö väga ilusasti ära. Samuti on Euler'i meetodi abil lihtne uurida vigade ülekandumist ligikaudsetes arvutustes ja veel teistes sarnastes kõrvalefektides.

Euler'i meetod ei sobi aga näiteks võrrandite jaoks, mille lahendid on kiirelt võnkuvad või omavad väga järske muutusi või millele väärtused muutuvad väga „pikal“ skaalal. Järgmistes loengutes vaatamegi Euler'i meetodist palju efektiivsemaid meetodeid.

või ka kujul

$$\begin{pmatrix} z_{1,i+1} \\ z_{2,i+1} \\ \vdots \\ z_{m,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{1,i} \\ z_{2,i} \\ \vdots \\ z_{m,i} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1(x_i, Z_i) \\ f_2(x_i, Z_i) \\ \vdots \\ f_m(x_i, Z_i) \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (1.21)$$

Näide 1.10 Vaatleme diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\left. \begin{cases} z_1' &= z_2^2 - 2z_1 \\ z_2' &= z_1 - z_2 - x z_2^2 \\ z_1(0) &= 0 \\ z_2(0) &= 2 \end{cases} \right\},$$

kus otsitavateks on funktsioonid $z_1(x)$ ja $z_2(x)$. Tähistame vektorid

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Z_1 = \begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{2,1} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad F(x, Z) = \begin{pmatrix} z_2^2 - 2z_1 \\ z_1 - z_2 - x z_2^2 \end{pmatrix}.$$

Olgu $h = 1/2$, siis $x_1 = x_0 + h = 1/2$. Leiame vektori Z_1 väärtused Euler'i meetodiga

$$Z_1 = Z_0 + h F(0, Z_0)$$

ehk

$$\begin{pmatrix} z_{1,1} \\ z_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^2 - 2 \cdot 0 \\ 0 - 2 - 0 \cdot 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Saime, et $z_1(0.5) \approx 2$ ja $z_2(0.5) \approx 1$.

◇ ◇ ◇

1.7 Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid *

Olgu antud m -järku ($m \geq 2$) harilik diferentsiaalvõrrand normaalkujul

$$y^{(m)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x)) \quad (1.22)$$

koos algtingimustega

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^1, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{m-1}. \quad (1.23)$$

Võttes appi uued muutujad

$$z_i := y^{(i)}, \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (1.24)$$

saame ülesande (1.22) taandada harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemile

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(x) = z_1(x) \\ z_1'(x) = z_2(x) \\ \dots \\ z_{m-2}'(x) = z_{m-1}(x) \\ z_{m-1}'(x) = F(x, y(x), z_1(x), \dots, z_{m-1}(x)) \end{array} \right\} \quad (1.25)$$

ning algtingimused (1.23) teisenevad kujule

$$y(x_0) = y_0, \quad z_1(x_0) = y_0^1, \quad \dots, \quad z_{m-1}(x_0) = y_0^{m-1}. \quad (1.26)$$

Osutub, et arvutitega on süsteemi (1.25)-(1.26) üldjuhul palju lihtsam lahendada kui esialgset ülesannet (1.22)-(1.23).

Näide 1.11 Vaatleme kolmandat järku diferentsiaalvõrrandit

$$y''' = -y y' + x \sin(y'')$$

algtingimustega

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

Teeme muutujavahetused

$$z_1(x) = y'(x), \quad z_2(x) = y''(x).$$

Sel juhul saame diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = z_1 \\ z_1' = z_2 \\ z_2' = -y z_1 + x \sin z_2 \end{array} \right\}$$

koos algtingimustega

$$y(0) = 0, \quad z_1(0) = 0, \quad z_2(0) = 1.$$

◇ ◇ ◇

Süsteemi lahendamine annab meile lisaks esialgse võrrandi lahendile $y(x)$ veel tema esimese tuletise $z_1(x)$ ja teise tuletise $z_2(x)$, mida tegelikult otseselt vaja ei lähe.

Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] L. Loone, V. Soomer. Matemaatilise analüüsi algkursus. Tartu Ülikooli Kirjastus 2009.
- [3] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu Ülikooli Kirjastus 2011.
- [4] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.
- [5] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.