

10 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid. Paraboolset tüüpi võrrandid

Sisukord

10 Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid. Paraboolset tüüpi võrrandid	127
10.1 Sissejuhatus	127
10.2 Keele võnkumise võrrandi tuletamine	128
10.3 Teist järku võrrandite klassifikatsioon	131
10.4 Rajatingimuste liigid	132
10.5 Ühemõõtmeline soojusjuhtivuse võrrand	133
10.6 Diferentsmeetod paraboolset tüüpi võrrandite lahendamiseks	135
10.7 Edaspidi sammuga ilmutatud diferentsskeem	137
10.8 Tagurpidi sammuga ilmutamata diferentsskeem	138

10.1 Sissejuhatus

Osatuletistega diferentsiaalvõrrandid kuuluvad igapäevaste füüsikaprobleemide juurde. Praktikas tekivad pigem osatuletistega võrrandid kui harilikud diferentsiaalvõrrandid.

Matemaatilise füüsika eesmärgiks on mitmesuguste füüsikaliste protsesside kirjeldamine diferentsiaalvõrrandite abil, nende võrrandite täpne või ligikaudne lahendamine ning lahendite omaduste uurimine ja füüsikaline interpreteerimine. On kujunenud tavaks lülitada matemaatilise füüsika võrrandite hulka vaid osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid ja mitte lülitada sinna harilikke diferentsiaalvõrrandeid. Seoses sellega esinevad osatuletistega diferentsiaalvõrrandite probleemid pigem kursuses „Matemaatilise füüsika võrrandid“ ja teistes kursustes neid väga ei kohta.

Osatuletistega võrrandite numbriliseks lahendamiseks on meile teejuhiks Enn Tamme „Arvutusmeetodid II“ ja Timothy Sauer’i „Numerical Analysis“, väikese üle-

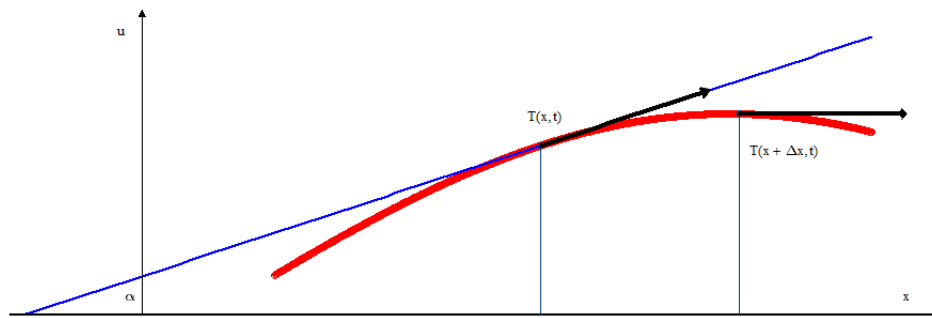
vaate leiab ka õpikust Jaan Janno „Arvutusmeetodid“. Infot võrrandite täpse lahendamise ja teoreetilise uurimise kohta leiab nt. materjalidest [3], [5].

Kuigi ligikaudsete meetodite abil saab põhimõtteliselt lahendada kõiki praktikast tulenevaid diferentsiaalvõrranditega seotud ülesandeid, ei tule suure arvutustööde mahu tõttu sellega praktiliselt toime ka kaasaegsed elektronarvutid (öeldud 1973. aasta raamatus [4], kuid tõsi ka tänasel päeval). See asjaolu teeb eriti aktuaalseks vastavate meetodite teoreetilise uurimuse ja efektiivsemate meetodite väljatöötamise.

10.2 Keele võnkumise võrrandi tuletamine

Toome ühe näite osatuletistega võrrandi tekkimise kohta (vt. [3, 5]). Keele all mõistame elastset painduvat niiti. Tuletame keele ristvõnkumise võrrandi.

Olgu pingule tõmmatud keele tasakaaluasendiks x – telg. Oletame, et keel on mingite väliste jõududega tasakaaluasendist välja viidud ja võngub xu -tasandis. Tähistagu $u(x, t)$ keele punkti x kõrvalekallet tasakaaluasendist ajamomendil t .



Me piirdume vaid keele väikeste ristvõnkumiste käsitlemisega, heites tuletuskäigus kõrvale liikmed, mis on teist ja kõrgemat järku $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ suhes ehk

$$\tan^2 \alpha = u_x^2 \approx 0.$$

Vaatleme keele osakest vahemikus $(x, x + \Delta x)$. Keele osakese pikkus on selles vahemikus leitav valemiga

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + u_x^2} dx \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x,$$

s.t. keele osakese pikkus jääb võnkumisel konstantseks (ei sõltu ajast). Hooke'i seaduse põhjal on siis ka keele suvalises punktis x mõjuva pingvektori $T(x, t)$ pikkus sõltumatu ajast t ja kohast x :

$$|T(x, t)| = T_0 = \text{konst.}$$

Keele elastsuse tõttu on pingejõud $T(x, t)$ suunatud piki keele puutujat. Keele osakesele mõjub summaarne pingejõud

$$T(x + \Delta x, t) - T(x, t).$$

Risti x -teljega mõjub pingejõu komponent

$$T_0 \sin \alpha \Big|_{x+\Delta x} - T_0 \sin \alpha \Big|_x \approx T_0 [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)].$$

Viimase ligikaudse võrduse tuletamisel kasutasime seost

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx \tan \alpha = u_x.$$

Piki x -telge mõjuva komponendi

$$T_0 \cos \alpha \Big|_{x+\Delta x} - T_0 \cos \alpha \Big|_x \approx T_0(1 - 1) = 0$$

võime jätta arvestamata, sest

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \approx 1.$$

Peale pingejõudude võivad keelele mõjuda välisjõud. Mõjugu välisjõud risti x -teljega ja olgu nende tiheduseks $F(x, t)$. Keele osakesele mõjub siis välisjõud $F(x, t)\Delta x$, osakesele mõjuvaks summaarseks jõuks aga on

$$T_0 [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + F(x, t)\Delta x$$

ning see mõjub risti x -teljega.

Newtoni II seaduse põhjal on keele osakesele mõjuv resultantjõud võrdne keele osakese massi ja kiirenduse korrutisega. Olgu $\rho(x)$ keele lineaarne tihedus, siis keele osakese massiks on $\rho(x)\Delta x$. Keele osakese kiirenduseks on $u_{tt}(x, t)$. Seega saame Newtoni II seaduse põhjal

$$T_0 [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)] + F(x, t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \cdot u_{tt}(x, t).$$

Jagades võrduse mõlemad pooled läbi suurusega Δx ja minnes piirile $\Delta x \rightarrow 0$, leiame

$$T_0 u_{xx} + F(x, t) = \rho(x) u_{tt}$$

ehk

$$u_{tt} = k(x) u_{xx} + f(x, t),$$

kus

$$k(x) = \frac{T_0}{\rho(x)} > 0, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho(x)}.$$

Saadud võrrandit nimetatakse keele väikeste ristvõnkumiste võrrandiks, lühemalt keele võnkumise võrrandiks. Kui keel on homogeenne, siis $\rho(x) = \rho = konst$ ja võrrand lihtsustub kujule

$$u_{tt} - D u_{xx} = f(x, t),$$

kus $D = \frac{T_0}{\rho} = konst$. Kui $f(x, t) = 0$, siis on tegemist keele vaba võnkumisega, vastasel korral sundvõnkumisega.

Vaatleme keele vaba võnkumise võrrandit

$$u_{tt} - k(x) u_{xx} = 0.$$

Seda võrrandit rahuldab keele hälve $u(x, t)$, kui me viime keele tasakaaluasendist mingisse algasendisse

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

ja andnud keelele mingid algkiirused

$$u_t(x, 0) = u_1(x),$$

laseme ta lahti. Homogeenne võrrand ja vastavad algtingimused ei võimalda üldiselt funktsiooni $u(x, t)$ üheselt määrata. Et lahend oleks ühene, on vaja fikseerida veel režiim keele otspunktides. näiteks, kui keel on kinnitatud punktides $x = 0$ ja $x = b$, lisanduvad algtingimustele veel nn. rajatingimused

$$u(0, t) = 0, \quad u(b, t) = 0.$$

Lõpmatu keele korral (keel katab kogu x -telje) rajatingimusi ei ole vaja lisada.

10.3 Teist järku võrrandite klassifikatsioon

Vaatleme teist järku osatuletistega võrrandit, milles otsitavaks on kahe muutuja funktsioon $u(x, y)$. Selle võrrandi üldkuju on

$$\boxed{A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u_x, u_y)} \quad (10.1)$$

Vaatleme ainult seda juhtu, kus kordajad A, B, C on konstandid.

Märkus 10.1. Kui funktsioon u sõltub ruumikoordinaadist ja ajast, siis eelistame sõltumatute muutujate rollis kasutada tähiseid x ja t .

Definitsioon 10.1. Diferentsiaalvõrrandi (10.1) tüüp määratakse teist järku tuletiste ees olevate pealiikmete A, B ja C abil, vastavalt determinandi

$$\Delta = \begin{vmatrix} B & 2A \\ 2C & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC \quad (10.2)$$

väärtusele.

(a) Kui $\Delta = 0$, siis võrrandit (10.1) nimetatakse paraboolset tüüpi võrrandiks.

(b) Kui $\Delta > 0$, siis võrrandit (10.1) nimetatakse hüperboolset tüüpi võrrandiks.

(c) Kui $\Delta < 0$, siis võrrandit (10.1) nimetatakse elliptilist tüüpi võrrandiks.

Näide 10.1. Keele võnkumise võrrand

$$u_{tt} - D u_{xx} = f(x, t)$$

on iga $D > 0$ korral hüperboolset tüüpi, kuna

$$A = -D, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad \Rightarrow \quad \Delta = 4D > 0.$$

Varda soojsuhtivuse võrrand

$$u_t - D u_{xx} = f(x, t)$$

on iga D korral paraboolset tüüpi, kuna

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = -D, \quad \Rightarrow \quad \Delta = 0.$$

Poissoni võrrand

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

on elliptilist tüüpi, kuna

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad \Rightarrow \quad \Delta = -4 < 0.$$

◇

Diferentsiaalvõrrand ei määra üheselt lahendit. Lahendi üheseks määramiseks tuleb võrrandile lisada tingimused, mida nimetatakse alg- ja rajatingimusteks.

Märkus 10.2. *Praktikas on erinevat tüüpi võrranditel üldjoones järgmised omadused.*

- *Paraboolset ja hüperboolset tüüpi võrrandid on defineeritud avatud piirkonnas. Rajatingimused ühele muutujale (enamasti ajamuutujale t) on määratud piirkonna ühes ääres. Süsteemi lahendamist alustatakse sealt määratud äärest ja liigutakse kiht-kihilt eemale.*
- *Elliptilist tüüpi võrrandite korral on rajatingimused defineeritud tervel suletud piirkonna rajal.*

Märkus 10.3. *Elliptilist tüüpi võrranditega seotakse tavaliselt rajatingimused, paraboolset ja hüperboolset tüüpi võrranditega aga algtingimused või alg- ja rajatingimused.*

10.4 Rajatingimuste liigid

1. Me ütleme, et rajatingimused on **Dirichlet' rajatingimused** ehk I tüüpi rajatingimused, kui nad sisaldavad ainult funktsiooni väärtusi. Näiteks hariliku diferentsiaalvõrrandi korral

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta,$$

ja osatuletistega võrrandi korral

$$u(a, t) = \gamma(t), \quad u(b, t) = \delta(t).$$

2. Me ütleme, et rajatingimused on **Neumann'i rajatingimused** ehk II tüüpi rajatingimused, kui nad sisaldavad ainult funktsiooni tuletise väärtusi. Näiteks hariliku diferentsiaalvõrrandi korral

$$u'(a) = \alpha, \quad u'(b) = \beta,$$

ja osatuletistega võrrandi korral

$$u_x(a, t) = 0, \quad u_x(b, t) = 1.$$

3. Me ütleme, et rajatingimused on **Robin'i rajatingimused** ehk III tüüpi rajatingimused, kui nad sisaldavad lineaarset kombinatsiooni funktsiooni ja tema tuletise väärtusest. Näiteks,

$$u(a, t) + 2u_x(a, t) = 1, \quad 3u(b, t) - u_x(b, t) = 0.$$

4. Me ütleme, et rajatingimused on **segatüüpi rajatingimused**, kui nad sisaldavad raja eripiirkondades eritüüpi rajatingimusi, näiteks Dirichlet' ja Neumann'i rajatingimusi

$$u(a, t) = \gamma(t), \quad u_x(b, t) = 1.$$

5. Me ütleme, et rajatingimused on **homogeensed**, kui kõik rajatingimused võrduvad nulliga, näiteks

$$u(a, t) = 0, \quad u_x(b, t) = 0.$$

10.5 Ühemõõtmeline soojusjuhtivuse võrrand

Võtame esialgu vaatluse alla lihtsa parabolset tüüpi võrrandi - soojusjuhtivusvõrrandi

$$u_t = D u_{xx} + f(x, t) \tag{10.3}$$

- Arvu $D > 0$ nimetatakse difusiooni kordajaks. Difusiooni all mõistetakse aine või energia ülekandumist kõrge kontsentratsiooniga piirkonnast madala kontsentratsiooniga piirkonda.
- Otsitav lahend $u(x, t)$ kirjeldab ühemõõtmelise homogeense varda soojuse levimist (temperatuuri) punktis x ajahetkel t .
- Ette antud funktsioon $f(x, t)$ kirjeldab väliseid kütteallikaid. Kui need puuduvad, siis saame klassikalise, ainult difusiooni teel leviva soojusjuhtivusvõrrandi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \tag{10.4}$$

Märkus 10.4. Võrrandist üksi jääb väheks, kuna tal leidub lõpmata palju lahendeid. Lahendite hulga vähendamiseks peame lisama kitsendavad tingimused. Nõuame, et lahend rahuldaks hetkel $t = 0$ algtingimust

$$u(x, 0) = \Phi(x) \quad (10.5)$$

ja otsime lahendit $t > 0$ korral. See on algtingimustega ehk Cauchy ülesanne, mille lahend $u(x, t)$ kirjeldab soojuse levikut lõpmatus vardas, $-\infty < x < \infty$.

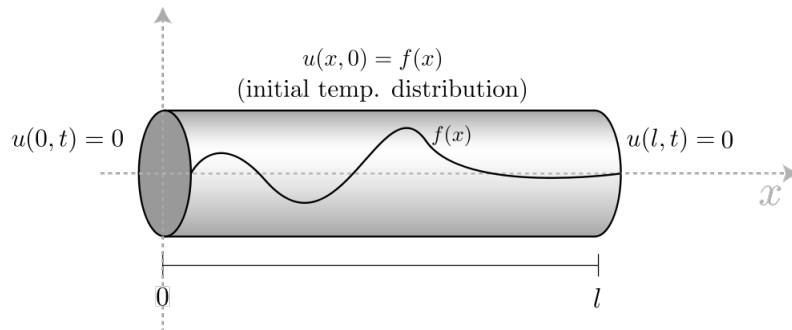
Märkus 10.5. Soojuse levimist lõplikus vardas kirjeldab segaülesanne, mille saame, kui algtingimusele lisame veel rajatingimused (näitavad soojusvahetust varda otstes), näiteks Dirichlet' rajatingimused

$$u(a, t) = \phi_1(t), \quad u(b, t) = \phi_2(t). \quad (10.6)$$

Seejuures eeldame, et on täidetud alg- ja rajatingimuste kooskõlatingimused

$$\Phi(a) = \phi_1(0), \quad \Phi(b) = \phi_2(0). \quad (10.7)$$

Joonisel on kujutatud olukorda, kus varda otstes hoitakse igal ajahetkel t nulltemperatuuri. Alahetkel $t = 0$ on soojus jaotunud funktsiooni $f(x)$ järgi (algtingimus $u(x, 0) = f(x)$).



Kokkuvõtteks võime lõpliku varda jaoks kirjutada lisatingimused kujul

$$\begin{array}{l} u(x, 0) = \Phi(x) \\ u(a, t) = \phi_1(t) \\ u(b, t) = \phi_2(t) \end{array} \quad (10.8)$$

10.6 Diferentsmeetod paraboolset tüüpi võrrandite lahendamiseks

Me vaatleme seatud ülesande (10.3), (10.8) lahendamist tõkestatud piirkonnas

$$\bar{G} = \{(x, t) : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\},$$

kus T on positiivne konstant. Seejuures nõuame, et ülesande lahend $u(x, t)$ rahuldaks sisepiirkonnas

$$G = \{(x, t) : a < x < b, 0 < t \leq T\}$$

võrrandit (10.3), rajajoonel sirgel $t = 0$ algtingimust (10.5) ning sirgetel $x = a$ ja $x = b$ rajatingimusi (10.6).

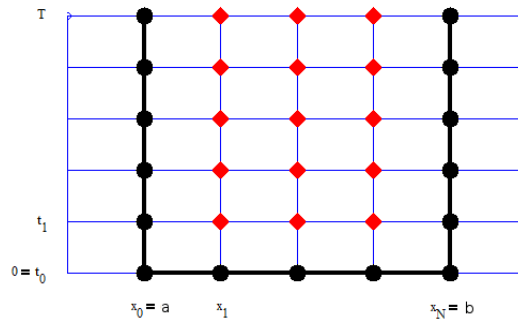
Ülesande ligikaudseks lahendamiseks katame piirkonna \bar{G} võrguga. Selleks valime sammud

$$h_x = \frac{b-a}{N_x} > 0, \quad h_t = \frac{T}{N_t} > 0$$

ning võtame sõlmedeks punktid $(x_i, t_j) \in \bar{G}$, kus

$$x_i = a + ih_x, \quad t_j = jh_t, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_t. \quad (10.9)$$

Võrgu sõlmed jaotame sise- ja rajasõlmedeks: sisesõlmedeks loeme piirkonnas G (joonisel punased täpid), rajasõlmedeks selle rajal $\Gamma = \bar{G} \setminus G$ paiknevad sõlmed (joonisel mustad täpid).



Ülesande lahendi lähisväärtused sõlmedes tähistame $u_{ij} \approx u(x_i, t_j)$. Lahendi väärtused rajasõlmedes saame leida algtingimustest (10.5) ja rajatingimustest (10.6)

$$u_{i0} = \Phi(x_i), \quad u_{0j} = \phi_1(t_j), \quad u_{N_x j} = \phi_2(t_j), \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_t \quad (10.10)$$

Lahendi lähisväärtuste leidmiseks sisesõlmedes aproksimeerime diferentsiaalvõrrandit (10.3). Teist järku tuletise aproksimeerimisel kasutame valemit

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{1}{h_x^2} [u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)] + O(h_x^2), \quad (10.11)$$

mis kehtib, kui funktsioonil $u(x, t)$ on vaadeldavas piirkonnas pidevad osalutelised x järgi kuni 4. järguni. Sõlmedes (x_i, t_j) saame liikme $D u_{xx}$ aproksimatsiooniks

$$L_{h_x} u_{ij} := \frac{D}{h_x^2} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}). \quad (10.12)$$

Osatuletise t järgi aproksimeerime ühega järgmistest valemistest:

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{1}{2h_t} [u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j-1})] + O(h_t^2), \quad (10.13)$$

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{1}{h_t} [u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)] + O(h_t), \quad (10.14)$$

$$u_t(x_i, t_{j+1}) = \frac{1}{h_t} [u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)] + O(h_t), \quad (10.15)$$

millest esimene kehtib, kui funktsioonil u on pidevad osatuletised t järgi kuni 3. järguni, ja kaks viimast kehtivad, kui sellel funktsioonil on pidevad osatuletised t järgi kuni 2. järguni. Tähistades $f_{ij} = f(x_i, t_j)$, saame kolm erinevat aproksimatsiooni diferentsiaalvõrrandile (10.3):

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_t} = L_{h_x} u_{ij} + f_{ij}, \quad (10.16)$$

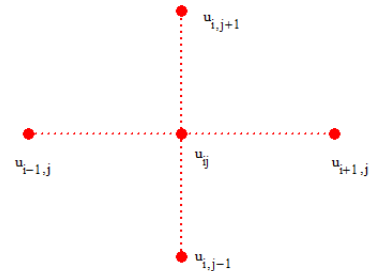
$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_t} = L_{h_x} u_{ij} + f_{ij}, \quad (10.17)$$

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_t} = L_{h_x} u_{i,j+1} + f_{i,j+1}. \quad (10.18)$$

Diferentsiskeemid (10.16)-(10.18) on määratud joonistel esitatud šabloonidel. Lahendi lähisväärtused võime jaotada kihtideks t -telje suunas, kusjuures igale j väärtusele vastab üks kiht. Sellele vastavalt jaotatakse diferentsiskeeme vastava arvu kihtide diferentsiskeemideks.

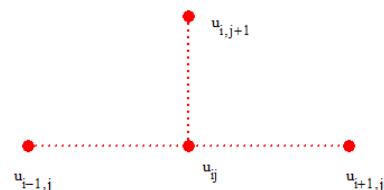
Kolmekihiline skeem (10.16),

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h_t} = L_{h_x} u_{ij} + f_{ij},$$



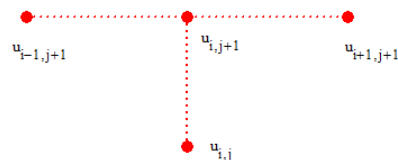
Kahekihiline skeem (10.17),

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_t} = L_{h_x} u_{ij} + f_{ij},$$



Kahekihiline skeem (10.18),

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_t} = L_{h_x} u_{i,j+1} + f_{i,j+1},$$



Definitsioon 10.2. *Diferents skeeme, milles esineb ainult üks lahendi lähisväärtus kõrgeimas kihis, nimetatakse ilmutatud, vastasel korral ilmutamata diferents skeemiks.*

Seega (10.16) ja (10.17) on ilmutatud skeemid ja (10.18) ilmutamata skeem.

Kuidas diferents skeemidega (10.16)-(10.18) praktiliselt lahendada ülesannet (10.3)-(10.6)?

10.7 Edaspidi sammuga ilmutatud diferents skeem

Inglise keelses kirjanduses on meetod tuntud kui *Forward Difference Method*. Kõige lihtsam on kasutada diferents skeemi (10.17), millest saame avaldada

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i+1,j} + (1 - 2\sigma)u_{ij} + \sigma u_{i-1,j} + h_t f_{ij} \quad (10.19)$$

kus

$$\sigma := D \frac{h_t}{h_x^2} \quad (10.20)$$

Märkus 10.6. *Diferents skeemi (10.19) sammul tekkiv viga on järku $O(h_t) + O(h_x^2)$. Viimane tingib vajaduse võtta ajateljel peenem jaotus kui koordinaatteljel.*

Et algtingimustest on teada $u_{i0} = \Phi(x_i)$, siis võttes valemis (10.19) $j = 0$, saame arvutada u_{i1} . Seejärel, võttes $j = 1$, arvutame u_{i2} jne. Nii on rekurrentse seose (10.19) abil kiht-kihilt arvutatavad lahendi lähisväärtused. Paneme seosed (10.19) kirja ka maatrikskujuks,

$$U_{j+1} = AU_j + F_j, \quad j = 0, \dots, N_t - 1 \quad (10.21)$$

kus U_{j+1} , A , U_j ja F_j on vastavalt

$$\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j+1} \\ u_{N_x-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\sigma & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & 1-2\sigma & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j} \\ u_{N_x-1,j} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N_x,j} \end{pmatrix} + h_t \begin{pmatrix} f_{1j} \\ f_{2j} \\ \vdots \\ f_{N_x-2,j} \\ f_{N_x-1,j} \end{pmatrix}.$$

Märkus 10.7. Ilmutatud skeem (10.19) on oma iseloomult iteratsioonimeetod. Lahend igas järgmises ajakihis leitakse eelnevates kihtides leitud lahendi väärtuste abil.

Märkus 10.8. Analoogiliselt saab arvutada ka kolmekihilise diferents skeemi (10.16) abil. Ainult, et selles $u_{i,j+1}$ avaldub u_{ij} ja $u_{i,j-1}$ kaudu, mistõttu tekivad raskused u_{i1} arvutamisel. Kui aga u_{i1} leida näiteks valemi (10.19) abil, siis edasine arvutamine toimub eriliste raskusteta.

10.8 Tagurpidi sammuga ilmutamata diferents skeem

Inglise keelses kirjanduses on meetod tuntud kui *Backward Difference Method*. Ilmutamata diferents skeemidega arvutamisel tuleb igas kihis lahendi lähisväärtuste leidmiseks lahendada võrrandisüsteem. Näiteks valemi (10.18) võime teisendada kujule

$$-\sigma u_{i+1,j+1} + (1+2\sigma)u_{i,j+1} - \sigma u_{i-1,j+1} = u_{ij} + h_t f_{i,j+1} \quad (10.22)$$

kus $\sigma = D \frac{h_t}{h_x^2}$.

Märkus 10.9. Diferents skeemi (10.22) sammul tekkiv viga on järku $O(h_t) + O(h_x^2)$.

Kirjutades seosed (10.22) välja $j = 0$ ja $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$ korral ning arvestades, et algtingimusest $u_{i0} = \Phi(x_i)$ ja rajatingimustest $u_{01} = \phi_1(t_1)$, $u_{N_x,1} = \phi_2(t_1)$, saame suuruste u_{i1} leidmiseks lineaarse võrrandisüsteemi, milles tundmatuid on niisama palju kui võrrandeid. Lahendades selle süsteemi, leiame suurused u_{i1} . Analoogiliselt teel arvutame suurused u_{i2} jne. Paneme seosed (10.22) kirja ka maatrikskujul,

$$AU_{j+1} = U_j + F_j, \quad j = 0, \dots, N_t - 1 \quad (10.23)$$

kus A, U_{j+1}, U_j ja F_j on vastavalt

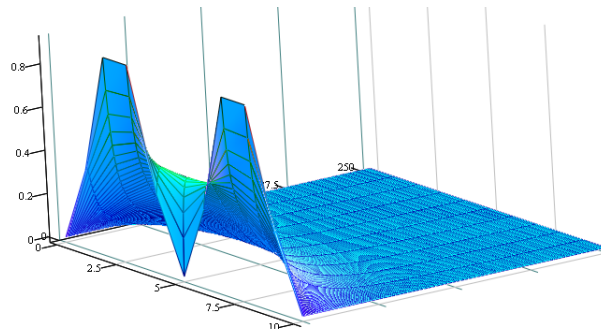
$$\begin{pmatrix} 1+2\sigma & -\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma & 1+2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+2\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{N-2,j+1} \\ u_{N-1,j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N-2,j} \\ u_{N-1,j} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} u_{0,j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N,j+1} \end{pmatrix} + h_t \begin{pmatrix} f_{1,j+1} \\ f_{2,j+1} \\ \vdots \\ f_{N-2,j+1} \\ f_{N-1,j+1} \end{pmatrix}.$$

Siin $N = N_x$.

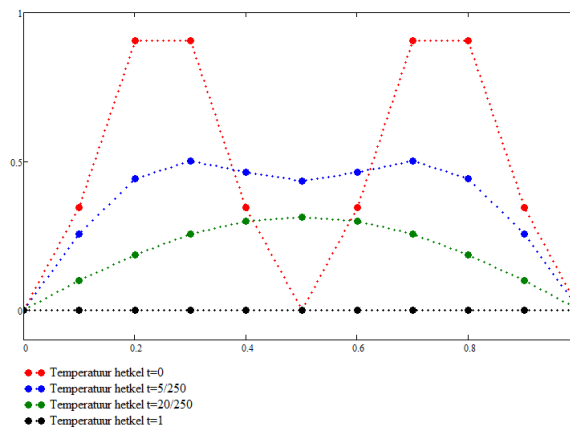
Näide 10.2. Vaatleme soojusjuhtivuse ülesannet

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin^2(2\pi x) \\ u(0, t) = 0 \\ u(1, t) = 0 \end{array} \right\}.$$

Siin $D = 1$ ja kasutatud on homogeeniseid Dirichlet' rajatingimusi. Lisaks, $N_x = 10$ ja $N_t = 250$. Lahend on leitud ilmutamata meetodiga (10.22). Näeme, et aja kulgedes koondub lahend nulliks (nii nagu loogiliselt peabki toimuma).



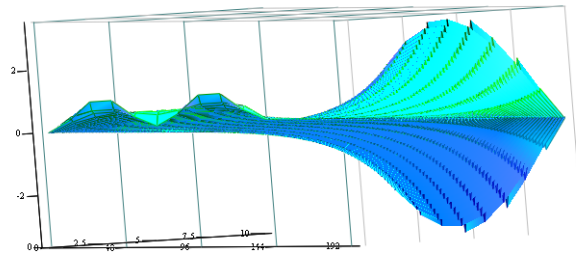
Järgmisel joonisel on toodud temperatuuride jaotus alghetkel (punasega), lõpphetkel $t = 1$ (mustaga) ja veel vehepealseid tulemusi.



◇

Märkus 10.10. Ilmutamata skeemi (10.22) kasutamisel peame tegema veidi rohkem arvutusi (igal sammul tuleb lahendada lineaarvõrrandite süsteem), kuid see tasub ennast ära meetodi stabiilsuse pärast. Osutub, et esimesena vaadeldud ilmutatud skeem (10.19) on teatud juhtudel mittestabiilne, s.t. arvutusvead võimenduvad ja kanduvad üle lõpplahendisse. Miks see nii on ja kuidas täpsemalt, seda vaatame järgmises loengus.

Näide 10.3. Kasutades eelmises näites N_t väiksemat väärtust $N_t = 192$ ja ilmutatud skeemi (10.19), ei koonu lahend enam nulli, vaid hakkab tõkestamatult kasvama.



◇

Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [3] I. Saarniit. Matemaatilise füüsika võrrandid (loengukonspekt). Tartu, 2004.
- [4] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.
- [5] E. Tamme, G. Vainikko. Matemaatilise füüsika võrrandid I. Tartu Riiklik Ülikool, 1973.