

11 Võrgumeetodi stabiilsus. Crank'i-Nicolson'i meetod

Sisukord

11 Diferentsmeetodi stabiilsus. Crank'i-Nicolson'i meetod	141
11.1 Maatriksi omaväärtused	141
11.2 Von Neumann'i stabiilsuse analüüs ilmutatud skeemi jaoks	143
11.3 Von Neumann'i stabiilsuse analüüs ilmutamata skeemi jaoks	147
11.4 Crank'i-Nicolson'i meetod	149

Võrgumeetodi stabiilsuse uurimiseks tuleb meil kasutada omaväärtuste ja spektraalraadiuse mõistet. Esiteks annamegi lühikese ülevaate antud mõistetest ja nendega kaasnevatest lihtsamatest omadustest.

11.1 Maatriksi omaväärtused

Definitsioon 11.1. *Olgu A ($n \times n$)-mõõtmeline ruutmaatriks ja $x \neq 0$ n -mõõtmeline vektor (võib olla kompleksarvuliste väärtustega). Kui mingi arvu $\lambda \in \mathbb{C}$ korral kehtib võrdus $Ax = \lambda x$, siis arvu λ nimetatakse maatriksi A omaväärtuseks ja vektorit x arvule λ vastavaks omavektoriks.*

Näide 11.1. Olgu antud $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Selle maatriksi üheks omaväärtuseks on $\lambda = 4$ ja vastavaks omavektoriks on $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tõepoolest,

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \lambda x = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

On selge, et sel juhul on arvule λ vastavaks omavektoriks iga vektor $c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, kus $c \neq 0$ on suvaline reaalne või kompleksne arv. \diamond

Definitsioon 11.2. *Maatriksi A karakteristlikuks võrrandiks nimetatakse võrrandit $|A - \lambda E| = 0$, kus E on vastavat järku ühikmaatriks. Maatriksi A karakteristlikuks juureks nimetatakse tema karakteristliku võrrandi juurt λ .*

Maatriksi A omaväärtus λ on ka maatriksi A karakteristlik juur.

Definitsioon 11.3. *Maatriksi $A - \lambda E$ nullruumiks nimetatakse kõigi vektorite x hulka, mille korral $Ax = \lambda x$ ja tähistakse $Ker(A - \lambda E)$.*

Iga nullist erinev vektor $x \in Ker(A - \lambda E)$ on maatriksi A omaväärtusele λ vastavaks omavektoriks.

Näide 11.2. Olgu antud $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Moodustame karakteristliku polünoomi

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6 = (\lambda - 4)(\lambda + 1).$$

Seega $\lambda = 4$ ja $\lambda = -1$ on karakteristliku polünoomi juured. Väärtusele $\lambda = 4$ vastava omavektori leiame maatriksi

$$A - 4E = \begin{pmatrix} 1 - 4 & 3 \\ 2 & 2 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

nullruumist $Ker(A - 4E)$. Näiteks,

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

ja omavektoriks sobib $x = (1, 1)^T$. Väärtusele $\lambda = -1$ vastava omavektori leiame maatriksi

$$A + E = \begin{pmatrix} 1 + 1 & 3 \\ 2 & 2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

nullruumist $\text{Ker}(A + E)$. Näiteks,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{2}x_2,$$

ja omavektoriks sobib $x = (3, -2)^T$. \diamond

Definitsioon 11.4. Ruutmaatriksi A spektriks nimetatakse maatriksi A kõigi omaväärtuste hulka ja spektraalraadiuseks $\rho(A)$ nimetatakse kõige suuremat omaväärtuste moodulit $|\lambda|$.

Teoreem 11.1. Kui $(n \times n)$ -mõõtmelise ruutmaatriksi spektraalraadius $\rho(A) < 1$ ja b on suvaline n -mõõtmeline vektor, siis iga n -mõõtmelise vektori x_0 korral iteratsiooniprotsess

$$x_{k+1} = Ax_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

koondub. Täpsemalt, leidub ühene vektor x_* nii, et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_* \quad \text{ja} \quad x_* = Ax_* + b.$$

Järeldus 11.1. Kui $(n \times n)$ -mõõtmelise ruutmaatriksi spektraalraadius $\rho(A) < 1$, siis iga n -mõõtmelise vektori x_0 korral iteratsiooniprotsess

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

koondub nullvektoriks $x_* = 0$.

11.2 Von Neumann'i stabiilsuse analüüs ilmutatud skeemi jaoks

Nagu harilike diferentiaalvõrrandite puhul, siis ka osatuletistega diferentiaalvõrrandid sisaldavad endas kahte põhilist vealiiki. Üks neist on nn. aproksimatsiooniviga, mis diferentsmeetodite korral tekib tuletiste asendamisel vastavate diferentsvalemitega ja on seotud viimaste jääkliikmetega. Eraldi tuleb aga vaadata meetodi enda viga

(ehk diferentsiskeemi viga), mis võib põhjustada ümardamisvigade ülekandumist ja vigade kuhjumist.

Definitsioon 11.5. *Me mõistame stabiilse diferentsmeetodi all sellist diferentsmeetodit, mille korral arvutusvead ei hakka kuhjuma.*

Definitsioon 11.6. *Diferentsiskeemi nimetatakse tingimatult stabiilseks, kui ta on stabiilne sõltumata ruumikoordinaadi h_x ja ajasammu h_t valitavast vahekorrast. Kui diferentsiskeem on stabiilne ainult h_x ja h_t teatava vahekorra puhul, siis nimetatakse skeemi tingimisi stabiilseks.*

Olgu meil antud soojusjuhtivuse võrrand koos Dirichlet' rajatingimustega:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t(x, t) = D u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad x \in [a, b], \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = \Phi(x) \\ u(a, t) = \phi_1(t) \\ u(b, t) = \phi_2(t) \end{array} \right\}. \quad (11.1)$$

Vaatleme edaspidi sammuga ilmutatud diferentsiskeemi (10.19), maatrikskujul (10.21):

$$U_{j+1} = AU_j + F_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (11.2)$$

Olgu U_j lähislahendi vektor ja $u(t_j)$ vektor

$$u(t_j) = (u(x_1, t_j), \dots, u(x_{N_x-1}, t_j))^T$$

skeemi (11.2) täpse lahendi väärtustest ajatasemel $t = t_j$. Sel juhul nende kahe väärtuse vahe avaldub seosena

$$e_{j+1} = U_{j+1} - u(t_{j+1}) = AU_j + F_j - (Au(t_j) + F_j) = A(U_j - u(t_j)) = Ae_j. \quad (11.3)$$

Kokkuvõtteks oleme saanud iteratsiooniprotsessi

$$e_{j+1} = Ae_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (11.4)$$

Järeldus 11.1 ütleb, et viga e_j ei suurene, kui maatriksi A omaväärtused on kõik mooduli poolest rangelt väiksemad ühest.

Teoreem 11.2. *Olgu antud $(n \times n)$ -mõõtmeline kolmediagonaalne ruutmaatriks*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

Maatriksi T omaväärtusteks on arvud

$$\lambda_j = 1 - 2 \cos \left(\frac{j}{n+1} \pi \right), \quad j = 1, \dots, n, \quad (11.6)$$

milledele vastavad omavektorid v_j kujul

$$v_j = \left(\sin \left(\frac{j}{n+1} \pi \right), \sin \left(\frac{2j}{n+1} \pi \right), \dots, \sin \left(\frac{nj}{n+1} \pi \right) \right)^T. \quad (11.7)$$

Tõestus. Tuletame esiteks meelde mõned trigonomeetrilised valemid. Iga täisarvu i ja reaalarvu x korral

$$\sin((i-1)x) = \sin(ix) \cos(x) - \cos(ix) \sin(x),$$

$$\sin((i+1)x) = \sin(ix) \cos(x) + \cos(ix) \sin(x),$$

millest saame kirjutada

$$\sin((i-1)x) + \sin((i+1)x) = 2 \sin(ix) \cos(x).$$

Viimast annab kirjutada kujule

$$-\sin((i-1)x) + \sin(ix) - \sin((i+1)x) = (1 - 2 \cos(x)) \sin(ix).$$

Fikseerime j ja võtame $x = \frac{j}{n+1} \pi$. Seega

$$Tv_j = \left(1 - 2 \cos \left(\frac{j}{n+1} \pi \right) \right) v_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

□

Teoreem 11.3. *Olgu ülesandes (11.1) antud $D > 0$ ja selle ülesande lahendamiseks kasutatud ilmutatud skeemi (11.2) jaoks sammud h_x ja h_t . Kui kehtib võrratus*

$$D \frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}, \quad (11.8)$$

siis edaspidi sammuga ilmutatud diferents skeem (11.2) on stabiilne.

Tõestus. Näitame, et eelnevalt tuletatud iteratsiooniskeem (11.4),

$$e_{j+1} = Ae_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

koondub nulli. Ilmutatud diferentsskeemi (11.2) maatriksis olid põhidiagonaalidel elemendid $\sigma, 1 - 2\sigma, \sigma$ ja mujal nullid. Seega, maatriksit A annab kirja panna kujul

$$A = -\sigma T + (1 - \sigma)E.$$

Olgu $n = N_x - 1$. Teoreemi 11.2 järgi on maatriksi $-\sigma T$ omaväärtusteks arvud

$$-\sigma \left(1 - 2 \cos \left(\frac{j}{n+1} \pi \right) \right), \quad j = 1, \dots, n,$$

ja A omaväärtusteks arvud

$$\lambda_j = -\sigma \left(1 - 2 \cos \left(\frac{j}{n+1} \pi \right) \right) + 1 - \sigma = 2\sigma \left(\cos \left(\frac{j}{n+1} \pi \right) - 1 \right) + 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Viimases avaldises kasutasime omadust, et nihutatud maatriksi $A + \alpha E$ omaväärtusteks on arvud $\lambda + \alpha$, kus λ on maatriksi A omaväärtus ja α on mingi arv.

Kuna iga argumendi $x \in (0, \pi)$ korral $-2 < \cos(x) - 1 < 0$, siis siit omakorda järeldub, et maatriksi A omaväärtuste λ_j jaoks kehtivad võrratused

$$1 - 4\sigma < \lambda_j < 1.$$

Kasutades järeldust 11.1, saame, et iteratsiooniprotsess $e_{j+1} = Ae_j$ koondub nulli, kui $\rho(A) = \max_j |\lambda_j| < 1$. Viimane kehtib, kui $\sigma < \frac{1}{2}$. Oleme saanud tingimuse

$$\sigma = D \frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}.$$

□

Märkus 11.1. *Kui me lahendame soojusjuhtivuse võrrandit (11.1), siis edaspidi samamuga ilmutatud diferentsskeem on tingimisi stabiilne.*

Märkus 11.2. *Stabiilsustingimus*

$$\sigma = D \frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}$$

seab teatud piirangud aja- ja ruumisammu valikuks. Ajasamm peab olema tunduvalt väiksem kui ruumisamm. Näiteks, kui ruumisamm $h_x = 0.01$ ja $D = 1$, siis ajasamm h_t peab olema väiksem arvust $\frac{0.01^2}{2} = 0.00005$. Väikese ajasammu korral on ülesandes esinevate ridade arv N_t ja seega ka töömaht väga suur.

11.3 Von Neumann'i stabiilsuse analüüs ilmutamata skeemi jaoks

Vaatleme nüüd tagurpidi sammuga ilmutamata meetodit (10.22), mille saab kirja panna maatrikskuju

$$U_{j+1} = A^{-1}U_j + b, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (11.9)$$

kus vektor $b = A^{-1}F_j$. Maatriksi A põhidiagonaalid sisaldasid liikmeid $-\sigma, 1+2\sigma, -\sigma$. Siit saame A avaldada kujul

$$A = \sigma T + (1 + \sigma)E. \quad (11.10)$$

Teoreem 11.4. *Olgu ülesandes (11.1) antud $D > 0$. Tagurpidi sammuga ilmutamata diferents skeem (11.9) on tingimatult stabiilne iga h_x ja h_t valiku korral.*

Tõestus. Olgu U_j lähislahendi vektor ja $u(t_j)$ vektor skeemi (11.9) täpse lahendi väärtustest ajatasemel $t = t_j$. Sel juhul nende kahe väärtuse vahe avaldub seosena

$$e_{j+1} = U_{j+1} - u(t_{j+1}) = A^{-1}U_j + b - (A^{-1}u(t_j) + b) = A^{-1}(U_j - u(t_j)) = A^{-1}e_j. \quad (11.11)$$

Oleme saanud iteratsiooniprotsessi

$$e_{j+1} = A^{-1}e_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (11.12)$$

Järeldus 11.1 ütleb, et viga e_j ei suurene, kui maatriksi A^{-1} omaväärtused on kõik mooduli poolest rangelt väiksemad ühest.

Olgu $n = N_x - 1$. Teoreemi 11.2 järgi on maatriksi $A = \sigma T + (1 + \sigma)E$ omaväärtusteks arvud

$$\lambda_j = \sigma \left(1 - 2 \cos \left(\frac{j}{n+1} \pi \right) \right) + 1 + \sigma = 1 + 2\sigma - 2\sigma \cos \left(\frac{j}{n+1} \pi \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Lihtne on näha, et $\lambda_j > 1$ iga $j = 1, \dots, n$ korral. Kuna pöördmaatriksi A^{-1} omaväärtused on maatriksi A omaväärtuste pöördväärtused, siis $\rho(A^{-1}) = \max_j |1/\lambda_j| < 1$. Kasutades järeldust 11.1, saame, et iteratsiooni protsess $e_{j+1} = A^{-1}e_j$ koondub nulli ilma lisakitsendusega h_t ja h_x jaoks. \square

Näide 11.3. Vaatleme parabolset võrrandit

$$u_t = 4 \times 10^{-10} u_{xx} + 650e^{-t} \left(1 - \frac{x}{10^{-4}}\right), \quad x \in [0, 10^{-4}], \quad t \in [0, 10].$$

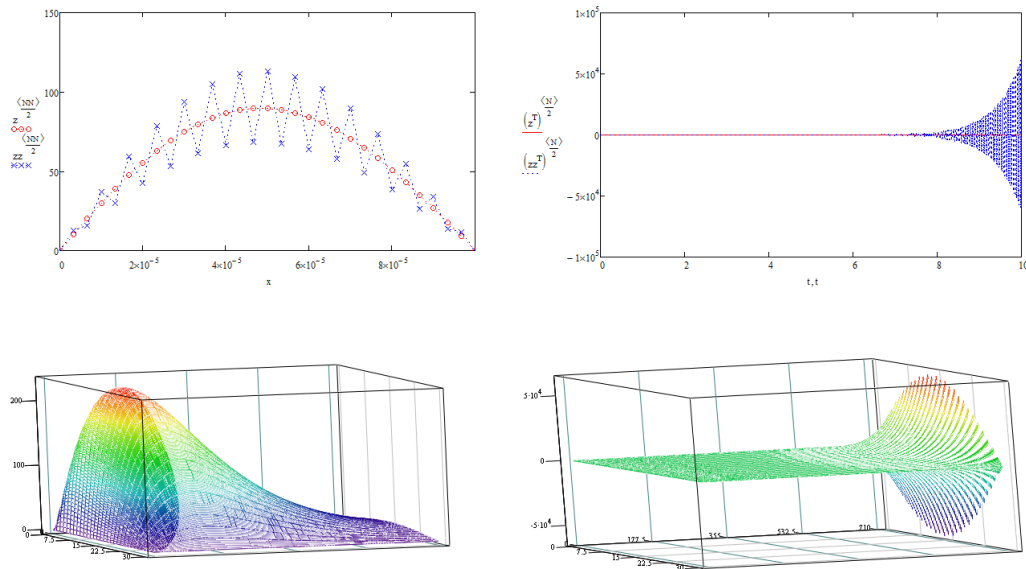
homogeensete alg- ja rajatingimustega

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad u(10, t) = 0.$$

Kasutades osalõikude arvuks vastavalt $N_x = 30$ ja $N_t = 710$, saame

$$D \frac{h_t}{h_x^2} \approx 0.507 > \frac{1}{2}.$$

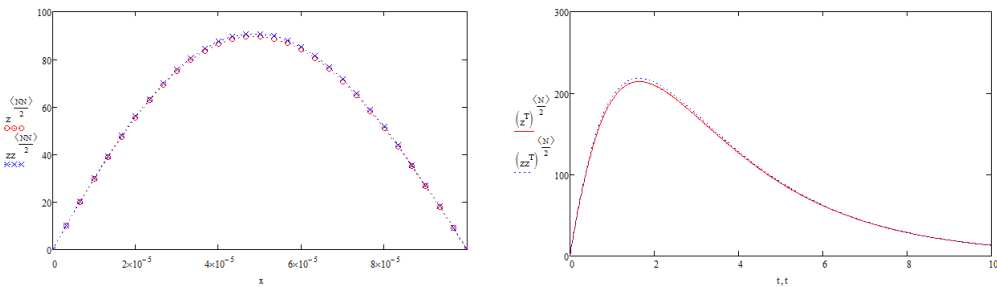
Ilmutatud skeemi ebastabiilsus on ristlõigete joonistelt selgelt näha (punasega on ilmutamata ja sinisega ilmutatud skeem):



Võttes $N_t = 721$, saame

$$D \frac{h_t}{h_x^2} \approx 0.499 < \frac{1}{2}$$

ja ristlõigete joonised on selgelt paremad



◇

11.4 Crank'i-Nicolson'i meetod

Kuna stabiilsus on garanteeritud suvalise ajasammu h_t korral, saab ilmutamata diferentskeemi kasutada ka suure sammuga h_t . Suure sammupikkuse h_t korral väheneb ridade arv j suhtes ja seoses sellega ka arvutustööde maht. Siiski, nii ilmutatud kui ilmutamata skeemil on sama järku $O(h_t + h_x^2)$ viga ja liiga suure ajasammu h_t kasutamine ei ole eriti efektiivne. Seetõttu on otstarbekas tuletada skeem, mille lokaalne viga on nii h_t kui h_x suhtes teist järku ehk $O(h_t^2 + h_x^2)$.

Üheks selliseks skeemiks on Crank'i-Nicolson'i skeem, mis tuletatakse järgmiselt. Kirjutame võrrandi (11.1) välja j ja $j + 1$ reas, kasutades juba varem tuttavaid diferentsvalemeid,

$$\frac{1}{h_t}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = D \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h_x^2} + f(x_i, t_{j+1}), \quad (11.13)$$

$$\frac{1}{h_t}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = D \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + f(x_i, t_j). \quad (11.14)$$

Liites viimased kaks võrrandit, saame

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_t}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = & \frac{1}{2}D \left(\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h_x^2} \right) + \frac{1}{2}D \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} \right) \\ & + \frac{1}{2}(f_{i,j} + f_{i,j+1}). \end{aligned} \quad (11.15)$$

Tähistdes $\sigma = D \frac{h_t}{h_x^2}$ ja grupeerides vastavad liikmed, saame Crank'i-Nicolson'i meetodi

$$\boxed{-\sigma u_{i-1,j+1} + (2 + 2\sigma)u_{i,j+1} - \sigma u_{i+1,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (2 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma u_{i+1,j} + h_t(f_{i,j} + f_{i,j+1})} \quad (11.16)$$

Crank'i-Nicolson'i skeem on absoluutselt stabiilne. Paneme seosed (11.16) kirja ka maatrikskujul,

$$\boxed{AU_{j+1} = BU_j + F_j, \quad j = 0, \dots, N_t - 1} \quad (11.17)$$

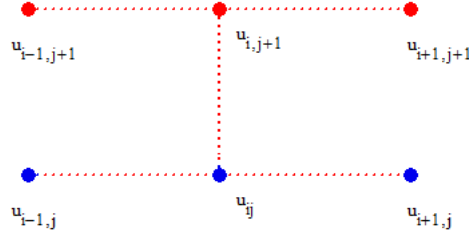
kus U_{j+1} , U_j ja F_j on vastavalt

$$A \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j+1} \\ u_{N_x-1,j+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j} \\ u_{N_x-1,j} \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} u_{0,j} + u_{0,j+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N_x,j} + u_{N_x,j+1} \end{pmatrix} + h_t \begin{pmatrix} f_{1,j} + f_{1,j+1} \\ f_{2,j} + f_{2,j+1} \\ \vdots \\ f_{N_x-2,j} + f_{N_x-2,j+1} \\ f_{N_x-1,j} + f_{N_x-1,j+1} \end{pmatrix}$$

ja A ja B on maatriksid

$$A = \begin{pmatrix} 2 + 2\sigma & -\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ -\sigma & 2 + 2\sigma & -\sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\sigma \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 + 2\sigma \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 - 2\sigma & \sigma & 0 & \cdots & 0 \\ \sigma & 2 - 2\sigma & \sigma & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 - 2\sigma \end{pmatrix}.$$

Märkus 11.3. Crank'i-Nicolson'i meetodi šabloon on 6-punktine, kus ülemises reas on tundmatud väärtused ja alumises juba leitud väärtused.



Teoreem 11.5. Olgu ülesandes (11.1) antud $D > 0$. Crank'i-Nicolson'i diferentskeem (11.16) on tingimatult stabiilne iga h_x ja h_t valiku korral.

Tõestus. Crank'i-Nicolson'i meetodi saab lühidalt kirja panna kujul

$$u_{j+1} = A^{-1}Bu_j + \sigma A^{-1}(s_{j-1} + s_j),$$

kus vektor s_j sisaldab ainult u täpseid väärtusi (antud alg- ja rajatingimustest) ja lisaks f väärtusi sõlmedes.

Olgu U_j lähislahendi vektor ja $u(t_j)$ vektor täpse lahendi väärtustest ajatasemel $t = t_j$. Sel juhul nende kahe väärtuse vahe avaldub seosena

$$\begin{aligned} e_{j+1} &= U_{j+1} - u(t_{j+1}) = A^{-1}BU_j + \sigma A^{-1}(s_{j-1} + s_j) - (A^{-1}Bu(t_j) + \sigma A^{-1}(s_{j-1} + s_j)) \\ &= A^{-1}B(U_j - u(t_j)) = A^{-1}Be_j. \end{aligned} \tag{11.18}$$

Oleme saanud iteratsiooniprotsessi

$$e_{j+1} = A^{-1}Be_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{11.19}$$

Järeldus 11.1 ütleb, et viga e_j ei suurene, kui matriksi $A^{-1}B$ omaväärtused on kõik mooduli poolest rangelt väiksemad ühest.

Märgime, et

$$A = \sigma T + (2 + \sigma)E, \quad B = -\sigma T + (2 - \sigma)E.$$

Olgu v_j maatriksi T omavektor ja λ_j vektorile v_j vastav omaväärtus. Sel juhul

$$\begin{aligned} A^{-1}Bv_j &= (\sigma T + (2 + \sigma)E)^{-1}(-\sigma\lambda_j v_j + (2 - \sigma)v_j) \\ &= \frac{1}{\sigma\lambda_j + 2 + \sigma}(-\sigma\lambda_j + 2 - \sigma)v_j. \end{aligned}$$

Siit saab avaldada maatriksi $A^{-1}B$ omaväärtused,

$$\tilde{\lambda}_j = \frac{-\sigma\lambda_j + 2 - \sigma}{\sigma\lambda_j + 2 + \sigma} = \frac{4 - (\sigma(\lambda_j + 1) + 2)}{\sigma(\lambda_j + 1) + 2} = \frac{4}{L} - 1,$$

kus $L = \sigma(\lambda_j + 1) + 2 > 2$, kuna $\lambda_j > -1$. Järelikult

$$-1 < \tilde{\lambda}_j < 1$$

ja järeldusest 11.1 saame, et iteratsiooni protsess $e_{j+1} = A^{-1}e_j$ koondub nulli ilma lisakitsenduseeta h_t ja h_x jaoks. □

Teoreem 11.6. [2]. *Olgu ülesandes (11.1) antud $D > 0$. Crank'i-Nicolson'i diferentskeem (11.16) on järku $O(h_x^2) + O(h_t^2)$.*

Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.