

## 12 Hüperboolset ja elliptilist tüüpi võrrandid

### Sisukord

<b>12 Hüperboolset ja elliptilist tüüpi võrrandid</b>	<b>152</b>
12.1 Võrgumeetod hüperboolset tüüpi võrrandi jaoks . . . . .	152
12.2 CFL tingimus . . . . .	156
12.3 Elliptilist tüüpi võrrandid . . . . .	158
12.4 Võrgumeetod elliptilist tüüpi võrrandite jaoks . . . . .	159

### 12.1 Võrgumeetod hüperboolset tüüpi võrrandi jaoks

Vaatleme hüperboolset tüüpi võrrandit, konkreetsemalt keele võnkumise võrrandit või ka laine levimise võrrandit

$$u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx} + f(x, t) \quad (12.1)$$

Laine levimise korral on  $c$  laine levimise kiirus. Laine levimise võrrandiga saab kirjeldada näiteks magnetlaineid atmosfääris, viulikeele võnkumist, helilainete korral õhurõhku. Erinevalt paraboolsest võrrandist, sisaldab hüperboolne võrrand ühe järgu võrra kõrgemat tuletist aja järgi, mis tingib ka ühe uue algtingimuse lisamist:

$$u(x, 0) = \Phi(x), \quad u_t(x, t) \Big|_{t=0} = \Psi(x), \quad (12.2)$$

mis tähendab, et alghetkel  $t = 0$  on keel mingis asendis  $\Phi(x)$  ja tema liikumiskiirus on igas punktis  $x$  kirjeldatav funktsiooniga  $\Psi(x)$ . Lõpliku keele korral lisanduvad ka rajatingimused (s.t. kuidas keel on vasakus ja paremas otspunktis kinnitatud):

$$u(a, t) = \phi_1(t), \quad u(b, t) = \phi_2(t). \quad (12.3)$$

Me vaatleme seatud ülesande lahendamist tõkestatud piirkonnas

$$\bar{D} = \{(x, t) : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\},$$

kus  $T$  on positiivne konstant. Seejuures nõuame, et ülesande lahend  $u(x, t)$  rahuldaks sisepiirkonnas

$$D = \{(x, t) : a < x < b, 0 < t \leq T\}$$

võrrandit (12.1), rajajoonel sirgel  $t = 0$  algtingimusi (12.2) ning sirgetel  $x = a$  ja  $x = b$  rajatingimusi (12.3).

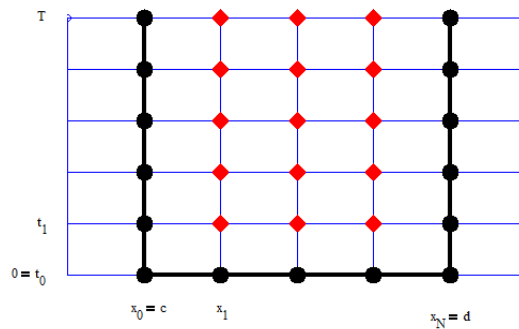
1. Ülesande ligikaudseks lahendamiseks katame piirkonna  $\bar{D}$  võrguga. Selleks valime sammud

$$h_x = \frac{b-a}{N_x} > 0, \quad h_t = \frac{T}{N_t} > 0$$

ning võtame sõlmedeks punktid  $(x_i, t_j) \in \bar{D}$ , kus

$$x_i = a + ih_x, \quad t_j = jh_t, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_t. \quad (12.4)$$

Võrgu sõlmed jaotame sise- ja rajasõlmedeks: sisesõlmedeks loeme piirkonnas  $D$ , rajasõlmedeks selle rajal  $\Gamma = \bar{D} \setminus D$  paiknevad sõlmed.



2. Algtingimusest  $u(x, 0) = \Phi(x)$  saab leida kõik esimese rea  $j = 0$  elemendid

$$u_{i0} = \Phi(x_i), \quad i = 0, \dots, N_x.$$

Rajatingimustest  $u(a, t) = \phi_1(t)$  ja  $u(b, t) = \phi_2(t)$  saab leida kõik esimese veeru  $i = 0$  ja viimase veeru  $i = N_x$  elemendid

$$u_{0j} = \phi_1(t_j), \quad u_{N_x j} = \phi_2(t_j), \quad j = 1, \dots, N_t.$$

3. Lahendi lähisväärtuste leidmiseks sisesõlmedes aproksimeerime diferentsiaalvõrrandit (12.1). Teist järku tuletise aproksimeerimisel kasutame valemeid

$$u_{xx}(x_i, t_j) = \frac{1}{h_x^2} [u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)] + O(h_x^2), \quad (12.5)$$

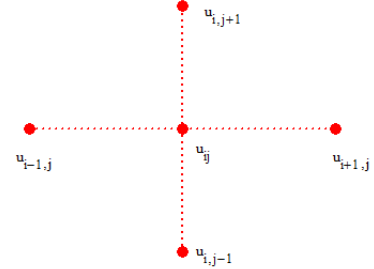
$$u_{tt}(x_i, t_j) = \frac{1}{h_t^2} [u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1})] + O(h_t^2), \quad (12.6)$$

mis kehtib, kui funktsioonil  $u(x, t)$  on vaadeldavas piirkonnas pidevad osalutelised  $x$  ja  $t$  järgi kuni 4. järguni.

Tähistades

$$\sigma := c \cdot \frac{h_t}{h_x} \quad (12.7)$$

saame pärast kordajate grupeerimist kolmekihilise skeemi:



$$u_{i,j+1} = (2 - 2\sigma^2) u_{i,j} + \sigma^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + h_t^2 f_{ij}. \quad (12.8)$$

Kuna nii  $i$  kui  $j$  kasutavad kolme kihti, siis saab toodud võrrandid välja kirjutada ainult punktides  $(x_i, t_j)$ , kus  $i = 1, \dots, N_x - 1$  ja  $j = 1, \dots, N_t - 1$ . See teeb kokku

$$(N_x - 1)(N_t - 1) = N_x N_t - N_x - N_t + 1$$

võrrandit.

4. Leiame  $u_{ij}$  väärtused teises reas, s.t.  $j = 1$  korral. Algtingimuse  $u_t(x, 0) = \Psi(x)$  aproksimeerime II järku valemi abil

$$u_t(x_i, 0) = \frac{1}{2h_t} [u(x_i, t_1) - u(x_i, t_{-1})] + O(h_t^2) \quad (12.9)$$

ehk

$$u_{i,-1} \approx u_{i,1} - 2h_t \Psi(x_i), \quad i = 0, \dots, N_x. \quad (12.10)$$

Kirjutades võrrandi (12.8) välja esimesel real  $j = 0$ , saame

$$u_{i,1} = (2 - 2\sigma^2) u_{i,0} + \sigma^2(u_{i+1,0} + u_{i-1,0}) - u_{i,-1} + h_t^2 f_{i,0} \quad (12.11)$$

ehk (12.10) abil

$$u_{i,1} = \frac{1}{2} (\sigma^2 u_{i-1,0} + (2 - 2\sigma^2) u_{i,0} + \sigma^2 u_{i+1,0}) + h_t \Psi_i + \frac{1}{2} h_t^2 f_{i,0}, \quad i = 1, \dots, N_x - 1. \quad (12.12)$$

Tähistame

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 2\sigma^2 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sigma^2 & 2 - 2\sigma^2 & \sigma^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 - 2\sigma^2 & \sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 & 2 - 2\sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Maatrikskujul näeb (12.12) välja järgmine:

$$U_1 = \frac{1}{2}AU_0 + \frac{1}{2}\sigma^2\tilde{U}_0 + h_t\Psi + \frac{1}{2}h_t^2F_0 \quad (12.13)$$

ehk

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,1} \\ u_{N_x-1,1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,0} \\ u_{N_x-1,0} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sigma^2 \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N_x,0} \end{pmatrix} + h_t \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \vdots \\ \Psi_{N_x-2} \\ \Psi_{N_x-1} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}h_t^2 \begin{pmatrix} f_{1,0} \\ f_{2,0} \\ \vdots \\ f_{N_x-2,0} \\ f_{N_x-1,0} \end{pmatrix}.$$

Sedasi oleme  $(N_x + 1)(N_t + 1)$  tundmatust suurusest  $u_{ij}$  leidnud kokku kahe esimese rea ja kahe esimese veeru elemendid ehk  $2(N_x + 1) + 2(N_t - 1) = 2N_x + 2N_t$  suurust  $u_{ij}$ .



- Ülejäänud tundmatud leitakse sisevõrranditest (12.8), alustades kolmanda rea elementide  $u_{i,2}$  elementide leidmisest ja jätkates rida rea haaval alt üles poole. Maatrikskujul oleme saanud samm-sammult leitava algoritmi

$$U_{j+1} = AU_j - U_{j-1} + \sigma^2\tilde{U}_j + h_t^2F_j \quad (12.14)$$

ehk

$$\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j+1} \\ u_{N_x-1,j+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j} \\ u_{N_x-1,j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_{1,j-1} \\ u_{2,j-1} \\ \vdots \\ u_{N_x-2,j-1} \\ u_{N_x-1,j-1} \end{pmatrix} + \sigma^2 \begin{pmatrix} u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{N_x,j} \end{pmatrix} + h_t^2 \begin{pmatrix} f_{1,j} \\ f_{2,j} \\ \vdots \\ f_{N_x-2,j} \\ f_{N_x-1,j} \end{pmatrix}.$$

## 12.2 CFL tingimus

**Teoreem 12.1.** Olgu  $h_x$  ruumikoordinaadi- ja  $h_t$  ajasamm ning laine kiirus  $c > 0$ .

Kui

$$\sigma = c \cdot \frac{h_t}{h_x} \leq 1,$$

siis ülesande (12.1)-(12.3) lahendamiseks kasutatav võrgumeetod (12.8) on stabiilne.

*Tõestus.* Skeem (12.8) on maatrikskujul (12.14)

$$U_{j+1} = AU_j - U_{j-1} + \sigma^2 \tilde{U}_j + h_t^2 F_j.$$

Kuna  $U_{j+1}$  sõltub kahest eelmise rea elementidest  $U_j$  ja  $U_{j-1}$ , siis kirjutame võrrandi ümber kujule

$$\begin{pmatrix} U_{j+1} \\ U_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_j \\ U_{j-1} \end{pmatrix} + \sigma^2 \begin{pmatrix} \tilde{U}_j \\ 0 \end{pmatrix} + h_t^2 \begin{pmatrix} F_j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sedasi saame vaadelda meetodit kui ühesammulist rekursiooni. Arvutusvead ei kasva astmelise kiirusega seni, kuni operaatori

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$$

omaväärtused on absoluutselt tõkestatud arvuga 1.

Olgu  $\lambda \neq 0$  operaatori  $\tilde{A}$  omaväärtus ja  $(y, z)^T$  vastav omavektor. Sel juhul

$$\lambda \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

ehk

$$\lambda y = Ay - z,$$

$$\lambda z = y,$$

millest järeldub võrdus

$$Ay = \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)y.$$

Viimane tähendab, et  $y$  on matriksi  $A$  omavektor, mis vastab omaväärtusele  $\mu := \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right)$ . Märgime ilma tõestuseta (vt. [2]), et matriksi  $A$  omaväärtused asuvad vahemikus  $2 - 4\sigma^2 \leq \mu \leq 2$ . Eelduse  $|\sigma| \leq 1$  korral saame, et  $-2 \leq \mu \leq 2$  ehk

$$\left|\lambda + \frac{1}{\lambda}\right| \leq 2.$$

Eelmisest peatükist teame, et  $\mu$  on reaalarv. Saab näidata, et sel juhul  $|\lambda| = 1$  või  $\lambda$  on reaalarv. Kui  $|\lambda| = 1$ , siis on teoreem tõestatud. Kui  $\lambda$  on reaalarv, siis saame võrratuse

$$|\lambda|^2 - 2|\lambda| + 1 \leq 0,$$

millest järeldub  $(|\lambda| - 1)^2 \leq 0$  ning ainukene võimalus on, et  $|\lambda| = 1$ . Järelikult on operaatori  $\tilde{A}$  kõik omaväärtused mooduli poolest tõkestatud arvuga 1.  $\square$

**Märkus 12.1.** Hüperboolset tüüpi võrrandi korral on ilmutatud diferentskeem (12.8) palju paremini käituv kui paraboolset tüüpi võrrandi korral, kus oli oluliselt rangem tingimus  $D \frac{h_t}{h_x^2} < \frac{1}{2}$ . Seega hüperboolset tüüpi võrrandi korral võib ilmutatud skeemi kasutada üsna julgelt. Kui lainekiirus  $0 < c \leq 1$ , siis võib võtta võrdsed sammud  $h_x = h_t$ , sel juhul  $\sigma \leq 1$ . Teiste sõnadega, teepikkus  $ch_t$ , mida laine läbib ajaühikus  $h_t$  ei tohi ületada ruumisammu  $h_x$ .

**Märkus 12.2.** Konstanti  $\sigma$  nimetatakse inglise keelses kirjanduses CFL numbriks (CFL number), mis on saanud nime matemaatikute R. Courant, K. Friedrichs ja H. Lewy järgi. Tingimust  $\sigma \leq 1$  nimetatakse CFL tingimuseks (CFL condition). Üldisemat tüüpi hüperboolsete võrrandite korral on stabiilsuse jaoks kasutatav CFL tingimus tarvilik, kuid mitte alati piisav tingimus.

**Näide 12.1.** Vaatleme homogeenet laine levimise võrrandit

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

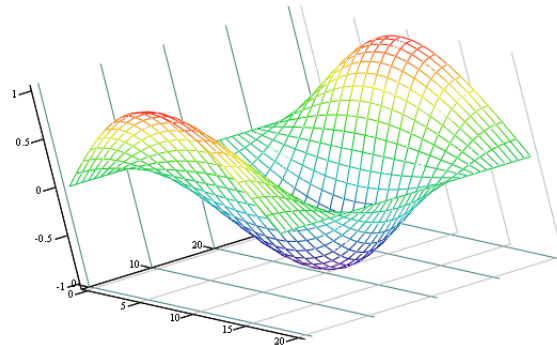
algtingimustega

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u_t(x, 0) = 0$$

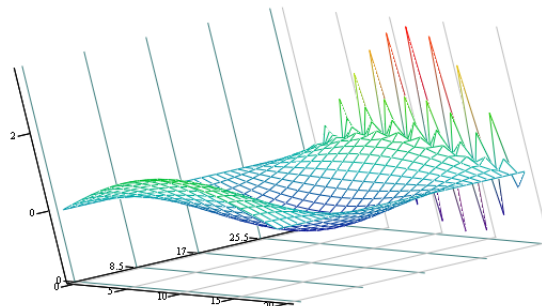
ja homogeenste rajatingimustega

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0.$$

Sel juhul laine levimise kiirus  $c = 2$ . Võttes  $N_x = 20$ ,  $h_x = 0.05$  ja  $N_t = 40$ ,  $h_t = 0.025$  saame  $\sigma = 2\frac{20}{40} = 1$  ja lähislahendi joonis näeb välja järgmine:



Võttes aga  $N_t = 34$ ,  $h_t \approx 0.029$ , siis saame  $\sigma \approx 1.176 > 1$  ja lähislahendi graafikule ilmuvad ebastabiilsuse tunnusjooned:



◇

## 12.3 Elliptilist tüüpi võrrandid

Elliptilist tüüpi võrranditel enamasti puudub ajamõõde. Selle asemel on kaks ruumikoordinaati  $x$  ja  $y$ .

**Definitsioon 12.1.** Olgu  $u(x, y)$  kaks korda pidevalt diferentseeruv funktsioon mingis  $x, y$  piirkonnas. Me nimetame operaatorit  $\Delta$ ,

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}, \tag{12.15}$$

Laplace'i operaatoriks.

**Definitsioon 12.2.** Pideva funktsiooni  $f(x, y)$  korral nimetatakse osatuletistega diferentsiaalvõrrandit

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad (12.16)$$

Poisson'i võrrandiks. Erijuhul, kui  $f(x, y) = 0$ , siis nimetatakse võrrandit (12.16)

Laplace'i võrrandiks. Laplace'i võrrandi lahendit nimetatakse harmooniliseks funktsiooniks.

Poisson'i võrrand on elliptilist tüüpi võrrand, mida lahendatakse enamasti mingis kinnises piirkonnas ja rajatingimused tuleb anda kogu piirkonna raja kohta. Poisson'i võrrandi lahendid kirjeldavad füüsikas tavaliselt potentsiaalset energiat.

**Definitsioon 12.3.** Funktsiooni  $f(x, y)$  gradiendiks punktis  $A = (a, b)$  nimetatakse vektorit  $\nabla f(A) = (f_x(A), f_y(A))$ .

Näiteks, elektriväli  $E$  on elektrostaatilise potentsiaali  $u$  gradient,

$$E = -\nabla u.$$

Elektrivälja gradient on omakorda Maxwell'i võrrandi abil seotud elektrivälja laengutihedusega  $\rho$ ,

$$\nabla E = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

kus  $\varepsilon$  on keskkonna dielektriline läbitavus. Pannes need kaks võrrandit kokku, saame

$$\Delta u = \nabla(\nabla u) = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

Erijuhul, nullise laengutiheduse korral, saame Laplace'i võrrandi. Poisson'i võrrandi abil saab veel modelleerida soojuse statsionaarset jaotumist jahutusseadmetes, gravitatsioonivälja potentsiaali, lennuki- ja autoosade aerodünaamilisi omadusi jne.

## 12.4 Võrgumeetod elliptilist tüüpi võrrandite jaoks

Vaatleme Poisson'i võrrandit

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = f(x, y) \quad (12.17)$$



kahemõõtmelises piirkonnas  $\bar{D} = [a, b] \times [c, d]$ .

Olgu meil lihtsamal juhul Dirichlet' rajatingimused

$$u(x, c) = g_1(x), \quad u(x, d) = g_2(x), \quad u(a, y) = g_3(y), \quad u(b, y) = g_4(y). \quad (12.18)$$

Üldjuhul piirkond  $\bar{D}$  võib olla üsna suvalise kujuga kinnine piirkond. Vaatleme lihtsuse huvides ainult ristkülikukujulist piirkonda  $\bar{D}$ ,

$$\bar{D} = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}.$$

Seejuures nõuame, et ülesande lahend  $u(x, y)$  rahuldaks sisepiirkonnas

$$D = \{(x, y) : x \in (a, b), y \in (c, d)\}$$

võrrandit (12.15) ja rajal  $\bar{D} \setminus D$  rajatingimusi (12.18).

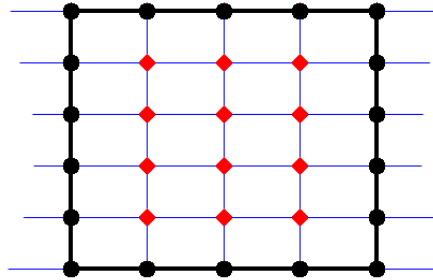
1. Ülesande ligikaudseks lahendamiseks katame piirkonna  $\bar{D}$  võrguga. Selleks valime sammud

$$h_x = \frac{b-a}{N_x-1} > 0, \quad h_y = \frac{d-c}{N_y-1} > 0$$

ning võtame sõlmedeks punktid  $(x_i, y_j) \in \bar{D}$ , kus

$$x_i = a + (i-1)h_x, \quad y_j = (j-1)h_y, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y. \quad (12.19)$$

Võrgu sõlmed jaotame sise- ja rajasõlmedeks: sisesõlmedeks loeme piirkonnas  $D$ , rajasõlmedeks selle rajal  $\Gamma = \bar{D} \setminus D$  paiknevad sõlmed.



2. Rajatingimustest (12.18) saab leida kõik raja peal asuvad suurused  $u_{i,j}$ :

$$u_{i,1} = g_1(x_i), \quad u_{i,N_y} = g_2(x_i) \quad u_{1,j} = g_3(y_j) \quad u_{N_x,j} = g_4(y_j),$$

$$i = 1, \dots, N_x, \quad j = 2, \dots, N_y - 1.$$

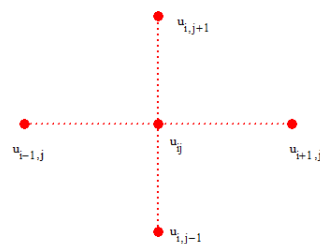
3. Lahendi lähisväärtuste leidmiseks sisesõlmedes aproksimeerime diferentsiaalvõrrandit (12.15). Teist järku tuletise aproksimeerimisel kasutame valemeid

$$u_{xx}(x_i, y_j) = \frac{1}{h_x^2} [u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)] + O(h_x^2), \quad (12.20)$$

$$u_{yy}(x_i, y_j) = \frac{1}{h_y^2} [u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})] + O(h_y^2), \quad (12.21)$$

mis kehtib, kui funktsioonil  $u(x, y)$  on vaadeldavas piirkonnas pidevad osalutellised  $x$  ja  $y$  järgi kuni 4. järguni.

Pärast kordajate grupeerimist saame nii  $x$ - kui  $y$ -telje suhtes kolmekihilise skeemi:



$$\frac{1}{h_x^2} u_{i-1,j} + \frac{1}{h_x^2} u_{i+1,j} - 2 \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) u_{i,j} + \frac{1}{h_y^2} u_{i,j-1} + \frac{1}{h_y^2} u_{i,j+1} = f_{i,j} \quad (12.22)$$

Nüüd peame arvestama, et meil on rajatingimused ridadel  $y = c$ ,  $y = d$  ja vertikaalidel  $x = a$  ja  $x = b$  ja sellepärast ei õnnestu enam lahendit  $u_{i,j}$  leida samm-sammult, vaid tuleb lahendada lineaarvõrrandite süsteem.

4. Algoritmi paremaks jälgimiseks võetakse appi uus vektor  $v$  pikkusega  $N_x N_y$  ning tehakse vektori  $v$  ja maatriksi  $u$  vahel järgmine teisendus:

$$v_{i+(j-1)N_x} = u_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y \quad (12.23)$$

Viimane tähendab, et esiteks võetakse I rea elemendid  $u_{i,1}$  ja pannakse nad järjest vektorisse  $v$ , siis võetakse II rea elemendid  $u_{i,2}$  ja lisatakse need järjest vektori  $v$  lõppu jne,

$$\begin{aligned} & (v_1, v_2, \dots, v_{N_x}, v_{N_x+1}, \dots, v_{2N_x}, \dots, v_{(N_y-1)N_x+1}, \dots, v_{N_x N_y}) \\ & = \\ & (u_{11}, u_{21}, \dots, u_{N_x,1}, u_{12}, \dots, u_{N_x,2}, \dots, u_{1,N_y}, \dots, u_{N_x N_y}). \end{aligned}$$

5. Sel juhul tekib meil  $N_x N_y$  võrrandit ja me lahendame lineaarvõrrandite süsteemi

$$Av = F.$$

Maatriks  $A$  on hõredalt täidetud maatriks. Olgu

$$\beta = \beta(i, j) = i + (j - 1)N_x, \quad i = 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, \dots, N_y - 1 \quad (12.24)$$

Koos vabaliikmega  $F$  täidetakse  $A$  järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} A_{\beta, \beta-1}, & A_{\beta, \beta}, & A_{\beta, \beta+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_x^2}, & -2 \left( \frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right), & \frac{1}{h_x^2} \end{pmatrix}, \quad (12.25)$$

$$\begin{pmatrix} A_{\beta, \beta-N_x}, & A_{\beta, \beta+N_x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_y^2}, & \frac{1}{h_y^2} \end{pmatrix}, \quad (12.26)$$

$$F_\beta = f(x_i, y_j), \quad i = 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, \dots, N_y - 1. \quad (12.27)$$

Analoogiliselt tuleb välja kirjutada rajatingimused (tekib  $N_x N_y$  võrrandit):

$$A_{i,i} = 1, \quad F_i = g_1(x_i), \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (12.28)$$

$$A_{\alpha(i), \alpha(i)} = 1, \quad F_{\alpha(i)} = g_2(x_i), \quad \alpha(i) = i + (N_y - 1)N_x, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad (12.29)$$

$$A_{\alpha(j), \alpha(j)} = 1, \quad F_{\alpha(j)} = g_3(y_j), \quad \alpha(j) = 1 + (j - 1)N_x, \quad j = 2, \dots, N_y - 1, \quad (12.30)$$

$$A_{\alpha(j), \alpha(j)} = 1, \quad F_{\alpha(j)} = g_4(y_j), \quad \alpha(j) = N_x + (j - 1)N_x, \quad j = 2, \dots, N_y - 1. \quad (12.31)$$

**Näide 12.2.** Vaatleme Laplace'i võrrandit

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

rajatingimustega

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u(x, 1) = \sin \pi x, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0.$$

Võtame lihtsuse huvides  $N = N_x = N_y = 3$ . Sel juhul  $h = h_x = h_y = 1/2$  ja  $1/h^2 = 4$  ning sõlmed tulevad

$$x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1, \quad y_1 = 0, y_2 = 0.5, y_3 = 1.$$

Lahendame süsteemi  $Av = F$ , mille lahendiks on vektor  $v$ , mis on võrgul  $[0, 1] \times [0, 1]$  seotud lahendiga  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$  järgmiselt:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_4 & v_7 \\ v_2 & v_5 & v_8 \\ v_3 & v_6 & v_9 \end{pmatrix}.$$

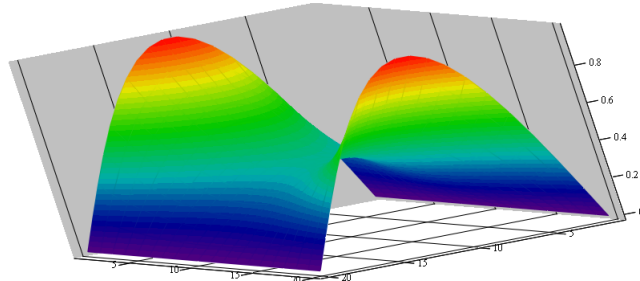
Meil on 8 rajapunkti ja ainult 1 sisepunkt. Seega  $Av = F$  on kujul

$$\begin{array}{c}
 y=0 \\
 \hline
 x=0 \\
 \hline
 \text{sisesõlm} \\
 \hline
 x=1 \\
 \hline
 y=1
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 4 & 0 & 4 & -16 & 4 & 0 & 4 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \mathbf{v}_1 \\
 \mathbf{v}_2 \\
 \mathbf{v}_3 \\
 v_4 \\
 v_5 \\
 v_6 \\
 \mathbf{v}_7 \\
 \mathbf{v}_8 \\
 \mathbf{v}_9
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 \sin(\pi \cdot 0) \\
 \sin(\pi \cdot 0.5) \\
 \sin(\pi \cdot 1) \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 0 \\
 \hline
 \sin(\pi \cdot 0) \\
 \sin(\pi \cdot 0.5) \\
 \sin(\pi \cdot 1)
 \end{pmatrix}
 .$$

Selle võrrandisüsteemi lahendiks on

$$\begin{pmatrix}
 u_{11} & u_{12} & u_{13} \\
 u_{21} & u_{22} & u_{23} \\
 u_{31} & u_{32} & u_{33}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 v_1 & v_4 & v_7 \\
 v_2 & v_5 & v_8 \\
 v_3 & v_6 & v_9
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0.5 & 1 \\
 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 .$$

Võttes  $N_x = 20$ ,  $h_x = 0.05$  ja  $N_y = 20$ ,  $h_y = 0.05$  saame järgmise  $u$  graafiku:



◇

## Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.