

14 Lõplike elementide meetod osatuletistega võrrandite lahendamiseks

Sisukord

14 Lõplike elementide meetod osatuletistega võrrandite lahendamiseks	181
14.1 Sissejuhatus	181
14.2 Elliptiline võrrand Dirichlet' rajatingimustega	182
14.3 Integreeruva ruuduga funktsioonide ruum $L^2(R)$	182
14.4 Galjorkini meetodi idee	183
14.5 Lõplike elementide valimine	184
14.6 Süsteemi $Av = F$ liikmete arvutamine lineaarsete B-splainide korral .	186

14.1 Sissejuhatus

Seoses kosmoselendude kavandamisega töötati 20. sajandi keskel välja kaasajani üks populaarsemaid meetodeid - lõplike elementide meetod (*Finite Element Method*). „Lõplike elementide meetod on väga efektiivne meetod igasuguste füüsikaliste ülesannete lahendamiseks. Selle kasutamisevõimalused ulatuvad pingete uurimisest lihtvarastes kuni selliste ülikeeruliste süsteemide lahendamiseni, nagu seda on aatomielekt-rijaam kui kompleksne tervik, samuti aatomijäälohkujad ja allveelaevad. Lahendatud on mitmeid vedeliku voolamise ülesandeid, nagu voolamine torudes, voolamine läbi paistammi, voolamine mitmesugustes keerulistes keskkondades. Lahendada võib ka kokkusurutava gaasi liikumise, elektrostaatika ja süsteemide võnkumise ülesandeid jne.“ (vt. [2]-[4]).

Lõplike elementide meetod on oma olemuselt kaalutud hälbe meetod, mille korral kasutatakse splaine või üldisemaid tükiti polünomiaalseid funktsioone. Meetodi erinevus tavalisest splineidega lähendamisest seisneb lahendi konstrueerimisviisis. Vaadeldav (määramis)piirkond jaotatakse osapiirkondadeks (elementideks), lahendatakse diferentsiaalvõrrand eraldi igal elemendil ja lõpuks kombineeritakse elementidel

saadud lahenditest kokku lahend terves piirkonnas (vt. [1, 6]).

Me teisendame Galjorkini meetodi abil algse diferentiaalvõrrandi vastavaks „nõrgaks vormiks“ ja kasutame ära teatud funktsiooniruumides esinevaid ortogonaalsuse omadusi. Tekkival lineaarvõrrandite süsteemil on tüüpiliselt head sümmeetriaomadused isegi siis, kui ülesandes kaasatud geomeetria on keeruline (vt. [5]).

14.2 Elliptiline võrrand Dirichlet' rajatingimustega

Vaatleme konkreetselt elliptilist tüüpi võrrandit

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) + r(x, y) u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in R \quad (14.1)$$

Dirichlet' rajatingimustega

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in S, \quad (14.2)$$

kus R on tõkestatud tasandiline piirkond, mis on piiratud tükiti sileda kinnise rajajoonega S .

14.3 Integreeruva ruuduga funktsioonide ruum $L^2(R)$

Definitsioon 14.1. *Piirkonnas $R \subset \mathbb{R}^2$ integreeruva ruuduga (reaalsed) funktsioonid moodustavad vektorruumi*

$$L^2(R) = \left\{ \psi(x, y) : (x, y) \rightarrow \mathbb{R} : \exists \iint_R \psi^2(x, y) dx dy < \infty \right\}. \quad (14.3)$$

Kirjutis $(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ tähendab siin, et funktsioon on vahemikus (a, b) määratud peaaegu kõikjal, täpsem formuleering ei ole meie jaoks oluline.

Märkus 14.1. *Ruum $L^2(R)$ on Hilberti ruum skalaarkorrutisega*

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \iint_R y_1(x, y) y_2(x, y) dx dy \quad (14.4)$$

Olgu $L_0^2(R)$ ruumi $L^2(R)$ selline alamruum, mille korral

$$L_0^2(R) = \{ f \in L^2(R) : f(x, y) = 0, \forall (x, y) \in S \},$$

s.t. ruumi $L_0^2(R)$ kuuluvad funktsioonid, mis on rajajoonel S võrdsed nulliga.

14.4 Galjorkini meetodi idee

Lõplike elementide meetod baseerub üldisel Galjorkini meetodil.

Tähistame võrrandi (14.1) jaoks hälbe

$$r(x, y) = \Delta u(x, y) + r(x, y) u(x, y) - f(x, y). \quad (14.5)$$

Me tahame, et hälve $r(x, y)$ oleks ortogonaalne võimalikult paljude funktsioonidega ruumist $L^2(R)$.

Olgu $\psi_1(x, y), \dots, \psi_m(x, y) \in L^2(R)$ mingid valitud funktsioonid. Sel juhul ortogonaalsuse tingimused $\langle r, \psi_i \rangle = 0$ võtavad kuju

$$\boxed{\iint_R (\Delta u + r u) \psi_i dx dy = \iint_R f \psi_i dx dy, \quad i = 1, \dots, m} \quad (14.6)$$

Viimast võrrandit nimetatakse ka elliptilise võrrandi (14.1) „nõrgaks vormiks“ (*weak form*).

Tähistame vektoriga $\vec{n} = (n_x, n_y)$ pinna S ühiknormaalvektorit, mis on suunatud tervel rajal S pinnast R välja poole.

Teoreem 14.1. *Green'i esimene samasus, [5]. Olgu tõkestatud tasandiline pind R ümbritsetud tükiti sileda rajajoonega S . Olgu u ja v siledad funktsioonid. Siis kehtib võrdus*

$$\iint_R v \Delta u dx dy = \int_S v \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - \iint_R \nabla u \cdot \nabla v dx dy. \quad (14.7)$$

Tuletise vektori \vec{n} suunas saab arvutada valemiga

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot (n_x, n_y). \quad (14.8)$$

Kasutades Green'i I samasust (14.7) valemis (14.6), saame ositi integreerimist kasutades võrdused

$$\begin{aligned} \int_S \psi_i \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS - \iint_R \nabla u \cdot \nabla \psi_i dx dy + \iint_R r u \psi_i dx dy \\ = \iint_R f \psi_i dx dy, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (14.9)$$

Me asetame lineaarse kombinatsiooni

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^m c_j \psi_j(x, y) \quad (14.10)$$

võrrandisse (14.9) lahendi u asemele ja saadud võrrandite süsteemist leiame tundmatud konstandid c_1, \dots, c_m .

Märgime, et **kui** funktsioonid $\psi_1, \dots, \psi_p \in L_0^2(R)$, **siis** $\psi_i(S) = 0$ ($i = 1, \dots, p$) ja võrrandid (14.9) võtavad kuju

$$\begin{aligned} - \iint_R \left(\sum_{j=1}^p c_j \nabla \psi_j \right) \cdot \nabla \psi_i \, dx \, dy + \iint_R r \left(\sum_{j=1}^p c_j \psi_j \right) \psi_i \, dx \, dy \\ = \iint_R f \psi_i \, dx \, dy, \quad i = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (14.11)$$

Viimast annab kordajate c_1, \dots, c_p suhtes kirjutada järgmiselt:

$$\sum_{j=1}^p \left(\iint_R \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, dx \, dy - \iint_R r \psi_j \psi_i \, dx \, dy \right) c_j = - \iint_R f \psi_i \, dx \, dy, \quad i = 1, \dots, p \quad (14.12)$$

Oleme saanud lineaarvõrrandite süsteemi $Ac = F$, kus

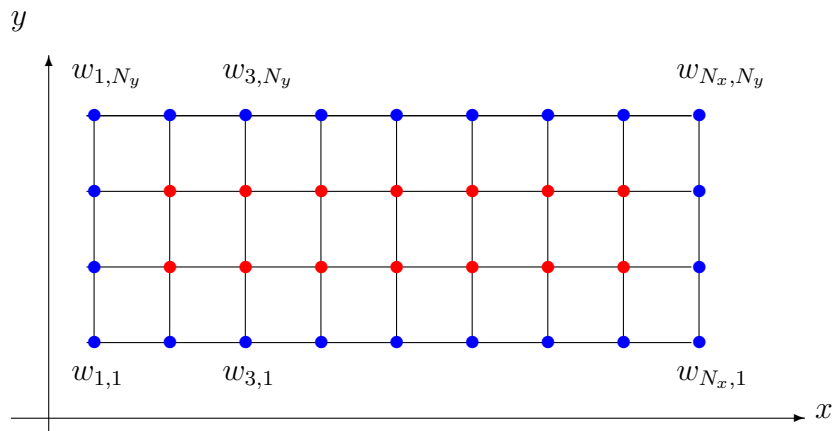
$$a_{ij} = \iint_R \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i \, dx \, dy - \iint_R r \psi_j \psi_i \, dx \, dy \quad (14.13)$$

ja

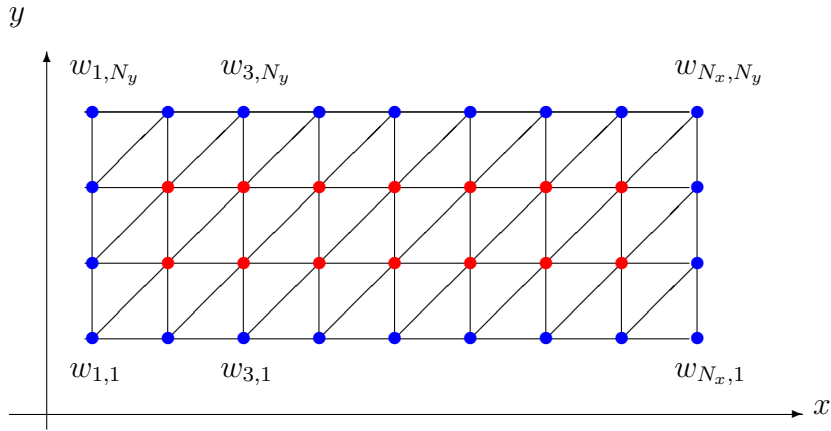
$$f_i = - \iint_R f \psi_i \, dx \, dy. \quad (14.14)$$

14.5 Lõplike elementide valimine

Olgu lihtsuse mõttes piirkond R ristkülik $[a, b] \times [c', d']$. Moodustame sõlmed (x_i, y_j) , $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$.



Moodustame saadud võrgust kolmnurkade võrgustiku.



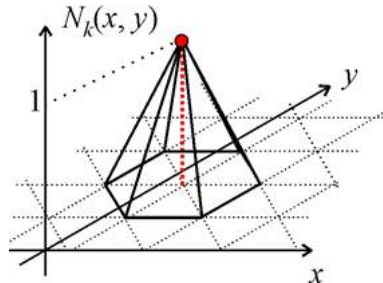
Järgnevalt valime sobivad funktsioonid ψ_1, \dots, ψ_m , kus $m = N_x N_y$. Alustame sellest, et meile sobivad sellised funktsioonid, mille korral nad on konkreetselt ühes sõlmes võrdsed ühega ja kõikides teistes sõlmedes nullid, s.t.

$$\psi_{\beta(i,j)}(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad , \text{ sõlmes } (x, y) = (x_i, y_j) \\ 0 \quad , \text{ sõlmedes } (x, y) \neq (x_i, y_j) \end{array} \right\}, \quad (14.15)$$

kus β on meile juba tuttav indeksi teisendus

$$\beta(i, j) = i + (j - 1)N_x, \quad i = 1, \dots, N_x, \quad j = 1, \dots, N_y. \quad (14.16)$$

Teiseks nõuame, et ψ_1, \dots, ψ_m oleksid täiesti lineaarsed igas joonisel toodud kolmnurkses piirkonnas. Viimaste rolli sobivad hästi 6-külgsed püramiidid, mille kõrgus asub sõlmes (x_i, y_j) ja mille küljed toetuvad vastavate naaberkolmnurkade külgedele.



Sellisel juhul on ψ_1, \dots, ψ_m diferentseeruvad kõikjal, välja arvatud kolmnurga otspunktides. Sellest piisab, et nad oleksid integreeruvad ja järelikult ruumi $L^2(R)$ elemendid. Paneme tähele, iga sõlme $(x_i, y_j) \in R \setminus S$ korral kuulub funktsioon $\psi_{\beta(i,j)}$

ruumi $L_0^2(R)$ (s.t. on rajal S võrdne nulliga). Siit saame, et kehtib omadus

$$w(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} c_{\beta(i,j)} \psi_{\beta(i,j)}(x_i, y_j) = c_{\beta(i,j)} \quad (14.17)$$

Viimane seos annab meile võimaluse leida võrrandi (14.1) lähilahendi väärtused sõlmedes ilma, et me konkreetselt defineeriks funktsioonide ψ_1, \dots, ψ_m jaoks mingeid täpsemaid keerulisi võrrandeid. Konstantide $c_{\beta(i,j)}$ määramiseks piisab lahendada võrrandisüsteem $Ac = F$. Järgnevalt vaatamegi, kuidas on võimalik A ja F elemente leida.

14.6 Süsteemi $Av = F$ liikmete arvutamine lineaarsete B-splainide korral

Definitsioon 14.2. *Tasandilise piirkonna R raskuskese asub punktis (\bar{x}, \bar{y}) , kus*

$$\bar{x} = \frac{\iint_R x \, dx \, dy}{\iint_R dx \, dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_R y \, dx \, dy}{\iint_R dx \, dy}. \quad (14.18)$$

Märgime, et $\iint_R dx \, dy = R_{\text{pindala}}$.

Märkus 14.2. *Kui R on tasandiline kolmnurk otspunktidega (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) , siis*

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Lemma 14.1. *Kahemõõtmelise lineaarse funktsiooni $L(x, y)$ keskvärtus tasandilisel piirkonnal R on võrdne arvuga $L(\bar{x}, \bar{y})$, ehk funktsiooni L väärtusega piirkonna R raskuskeskmes,*

$$\iint_R L(x, y) \, dx \, dy = L(\bar{x}, \bar{y}) \cdot R_{\text{pindala}}. \quad (14.19)$$

Tõestus. Olgu antud kahemõõtmeline lineaarne funktsioon $L(x, y) = a + bx + cy$. Siis

$$\begin{aligned} \iint_R L(x, y) \, dx \, dy &= \iint_R (a + bx + cy) \, dx \, dy \\ &= a \iint_R dx \, dy + b \iint_R x \, dx \, dy + c \iint_R y \, dx \, dy \\ &= R_{\text{pindala}} \cdot (a + b\bar{x} + c\bar{y}). \end{aligned}$$

□

Vaatleme nüüd suvalist kaks korda diferentseeruvat kahemõõtmelist funktsiooni $f(x, y)$. Kirjutame välja Taylor'i valemi punktis (\bar{x}, \bar{y}) ,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) \\ &\quad + O((x - \bar{x})^2, (x - \bar{x})(y - \bar{y}), (y - \bar{y})^2) \\ &= L(x, y) + O((x - \bar{x})^2, (x - \bar{x})(y - \bar{y}), (y - \bar{y})^2), \end{aligned}$$

kus $L(x, y)$ on kahemõõtmeline lineaarne funktsioon,

$$L(x, y) = \left(f(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{x} - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot \bar{y} \right) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \cdot y.$$

Toodud seoste abil võime ligikaudselt leida kahekordse integraali

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \iint_R L(x, y) dx dy \\ &\quad + \iint_R O((x - \bar{x})^2, (x - \bar{x})(y - \bar{y}), (y - \bar{y})^2) dx dy \\ &= R_{pindala} \cdot L(\bar{x}, \bar{y}) + O(h^4) = R_{pindala} \cdot f(\bar{x}, \bar{y}) + O(h^4), \end{aligned}$$

kus h on piirkonna R diameeter (kõige suurem kaugus piirkonna R kahe punkti vahel).

Kokkuvõtteks oleme saanud keskpunkti kvadratuurvalemi kahemõõtmelise juhu jaoks:

$$\boxed{\iint_R f(x, y) dx dy = R_{pindala} \cdot f(\bar{x}, \bar{y}) + O(h^4)} \quad (14.20)$$

kus (\bar{x}, \bar{y}) on piirkonna R raskuskese ja $h = \text{diam}(R)$.

Lemma 14.2. *Olgu $\psi(x, y)$ lineaarne funktsioon kolmnurgal K tippudega (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) , kusjuures $\psi(x_1, y_1) = 1$, $\psi(x_2, y_2) = 0$, $\psi(x_3, y_3) = 0$. Siis*

$$\psi(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{3}.$$

Lemma 14.3. *Olgu $\psi_1(x, y)$ ja $\psi_2(x, y)$ lineaarsed funktsioonid kolmnurgal K tippudega (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ja (x_3, y_3) , kusjuures $\psi_1(x_1, y_1) = 1$, $\psi_1(x_2, y_2) = 0$, $\psi_1(x_3, y_3) = 0$ ning $\psi_2(x_1, y_1) = 0$, $\psi_2(x_2, y_2) = 1$, $\psi_2(x_3, y_3) = 0$. Olgu $f(x, y)$ kolmnurgal K kaks korda diferentseeruv funktsioon. Tähistame*

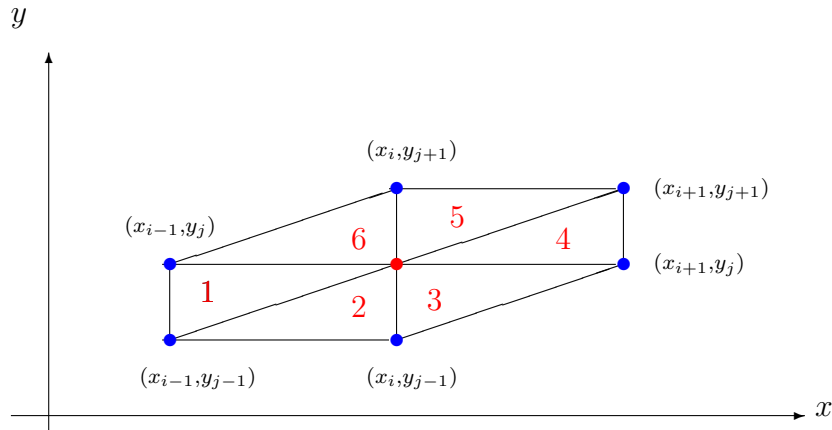
$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Siis kehtivad järgmised väited:

1. Kolmnurga K pindala on $\frac{|D|}{2}$;
2. $\nabla\psi_1(x, y) = \left(\frac{y_2-y_3}{D}, \frac{x_3-x_2}{D}\right)$;
3. $\iint_K \nabla\psi_1 \cdot \nabla\psi_1 dx dy = \frac{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}{2|D|}$;
4. $\iint_K \nabla\psi_1 \cdot \nabla\psi_2 dx dy = \frac{-(x_1-x_3)(x_2-x_3)-(y_1-y_3)(y_2-y_3)}{2|D|}$;
5. $\iint_K f \psi_1^2 dx dy = f(\bar{x}, \bar{y})\frac{|D|}{18} + O(h^4)$;
6. $\iint_K f \psi_1 \psi_2 dx dy = f(\bar{x}, \bar{y})\frac{|D|}{18} + O(h^4)$;
7. $\iint_K f \psi_1 dx dy = f(\bar{x}, \bar{y})\frac{|D|}{6} + O(h^4)$;

Siin (\bar{x}, \bar{y}) on kolmnurga K raskuskese ja $h = \text{diam}(K)$.

Paneme tähele, et 6-külgne püramiid $\psi_{\beta(i,j)}$ on nullist erinev ainult kolmnurka-
del, mida tähistame 1, 2, 3, 4, 5, 6. Kasutame lemmat (14.3) kõigi 6 kolmnurga kohta.
Sel juhul $|D| = h_x h_y$, kus h_x on x -telje osalõigu pikkus ja h_y on y -telje osalõigu
pikkus.



Lemma (14.3) punkti 3. järgi summeerime kõigi 6 kolmnurga jaoks

$$\frac{h_y^2}{2h_x h_y} + \frac{h_x^2}{2h_x h_y} + \frac{h_x^2 + h_y^2}{2h_x h_y} + \frac{h_y^2}{2h_x h_y} + \frac{h_x^2}{2h_x h_y} + \frac{h_x^2 + h_y^2}{2h_x h_y} = \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x h_y} \quad (14.21)$$

Märgime, et kuue kolmnurga raskuskeskmed asuvad punktides

$$B_1 = \left(x_i - \frac{2}{3}h_x, y_j - \frac{1}{3}h_y\right), \quad (14.22)$$

$$B_2 = \left(x_i - \frac{1}{3}h_x, y_j - \frac{2}{3}h_y\right), \quad (14.23)$$

$$B_3 = \left(x_i + \frac{1}{3}h_x, y_j - \frac{1}{3}h_y\right), \quad (14.24)$$

$$B_4 = \left(x_i + \frac{2}{3}h_x, y_j + \frac{1}{3}h_y\right), \quad (14.25)$$

$$B_5 = \left(x_i + \frac{1}{3}h_x, y_j + \frac{2}{3}h_y\right), \quad (14.26)$$

$$B_6 = \left(x_i - \frac{1}{3}h_x, y_j + \frac{1}{3}h_y\right). \quad (14.27)$$

Kasutades lemma (14.3) punkte 5.-6., saame summerides

$$-\frac{h_x h_y}{18} (r(B_1) + r(B_2) + r(B_3) + r(B_4) + r(B_5) + r(B_6)).$$

Siit võime kokkuvõtteks tuletada järgmised seosed:

$$\boxed{A_{\beta(i,j),\beta(i,j)} = \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x h_y} - \frac{h_x h_y}{18} (r(B_1) + r(B_2) + r(B_3) + r(B_4) + r(B_5) + r(B_6))}$$

$$i = 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, \dots, N_y - 1$$

(14.28)

Analoogiliselt lemma (14.3) abil saame

$$\boxed{\begin{aligned} A_{\beta(i,j),\beta(i,j)-N_x-1} &= -\frac{h_x h_y}{18} (r(B_1) + r(B_2)) \\ A_{\beta(i,j),\beta(i,j)-N_x} &= -\frac{h_x}{h_y} - \frac{h_x h_y}{18} (r(B_2) + r(B_3)) \\ A_{\beta(i,j),\beta(i,j)-1} &= -\frac{h_x}{h_y} - \frac{h_x h_y}{18} (r(B_1) + r(B_6)) \\ A_{\beta(i,j),\beta(i,j)+1} &= -\frac{h_x}{h_y} - \frac{h_x h_y}{18} (r(B_3) + r(B_4)) \\ A_{\beta(i,j),\beta(i,j)+N_x} &= -\frac{h_x}{h_y} - \frac{h_x h_y}{18} (r(B_5) + r(B_6)) \\ A_{\beta(i,j),\beta(i,j)+N_x+1} &= -\frac{h_x h_y}{18} (r(B_4) + r(B_5)) \end{aligned}}$$

$$i = 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, \dots, N_y - 1$$

(14.29)

Järgnevalt leiame lemma (14.3) punkti 7. abil

$$\boxed{F_{\beta(i,j)} = -\frac{h_x h_y}{6} (f(B_1) + f(B_2) + f(B_3) + f(B_4) + f(B_5) + f(B_6))}$$

$$i = 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 2, \dots, N_y - 1$$

(14.30)

Nüüd jääb üle lisada väärtused, mis on seotud rajajoonega S . Kuna rajal peab kehtima $w(x_i, y_j) = g(x_i, y_j)$, siis

$$\begin{aligned} A_{\beta(i,j),\beta(i,j)} &= 1 \\ F_{\beta(i,j)} &= g(x_i, y_j) \\ i &= 1, \dots, N_x, \quad j = 1, N_y; \quad i = 1, N_x, \quad j = 2, \dots, N_y - 1 \end{aligned} \quad (14.31)$$

Näide 14.1. Vaatleme ülesannet

$$u_{xx} + u_{yy} + 4\pi^2 u = 2 \sin(2\pi y), \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1],$$

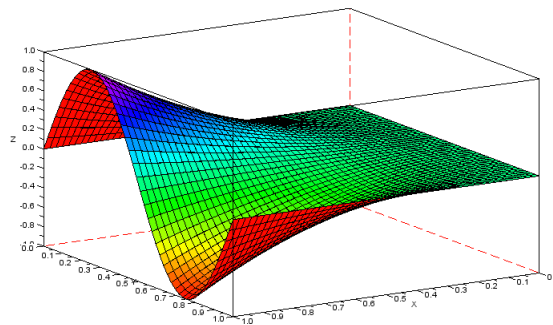
Dirichlet' rajatingimustega

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = \sin(2\pi y).$$

Võtame $N_x = 4$ ja $N_y = 5$, $h_x = \frac{1}{N_x-1} = \frac{1}{3}$ ning $h_y = \frac{1}{N_y-1} = \frac{1}{4}$. Sel juhul lahendi u lähisväärtused sõlmedes järgmiselt:

$$u(x_i, y_j) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & u_{45} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4422 & 0.0623 & -0.2654 & 0 \\ 0 & 0.7953 & 0.0679 & -0.6148 & 0 \\ 0 & 1 & 1.2 \cdot 10^{-16} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Joonisel on lahendatud $N_x = N_y = 50$ jaoks.



◇

Toome lõpetuseks ära kahekordse integraali arvutusvalemid teatavatel erijuhtudel.

Lemma 14.4. *Kui funktsioon f on integreeruv üle kõvertrapetsi R , mis on alt ja ülalt piiratud vastavalt joontega $y = \alpha(x)$ ja $y = \beta(x)$ ning külgedelt sirgetega $x = a$ ja $x = b$ ning eksisteerib integraal*

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy, \quad \forall x \in [a, b],$$

siis kehtib valem

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy. \quad (14.32)$$

Lemma 14.5. *Kui funktsioon f on integreeruv üle kõvertrapetsi R , mis on vasakult ja paremalt piiratud vastavalt joontega $y = \gamma(x)$ ja $y = \delta(x)$ ning külgedelt sirgetega $x = c$ ja $x = d$ ning eksisteerib integraal*

$$\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) dy, \quad \forall x \in [c, d],$$

siis kehtib valem

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d dx \int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} f(x, y) dy. \quad (14.33)$$

Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] J. Kirs, G. Arjassov. Sissejuhatus lõplike elementide meetodisse I, TTÜ 1999.
- [3] J. Kirs, G. Arjassov. Sissejuhatus lõplike elementide meetodisse II, TTÜ 1999.
- [4] J. Kirs. Sissejuhatus lõplike elementide meetodisse III, TTÜ 2001.
- [5] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [6] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.