15 Stohhastilised diferentsiaalvõrrandid

Sisukord

15.1 Juhuslikud protsessid

Seni oleme vaadelnud nn. deterministlikke võrrandeid, kus andes ette lahendi algväärtuse(d), on lahendi edaspidine käitumine üheselt määratud (täielikult kirjeldatav). Päris elus tuleb ette palju selliseid protsesse, mis tunduvad pigem käituvat juhuslikult nagu näiteks veeseis jões, aktsia hind börsil. Seetõttu on kasulik vaadelda juhuslikke suurusi sõltuvana täiendavast parameetrist - ajast.

Definitsioon 15.1. *Juhusliku protsessi (ka stohhastilise protsessi) all mõistetakse juhuslike suuruste peret* $\{X(t) : t \in T\}$*, mille iga liige* $X(t)$ *on juhuslik suurus tavalises mõttes. Seejuures eeldame, et kõik juhuslikud suurused* $X(t), t \in T$*, on määratud ühel ja samal tõenäosusruumil (vt. [2]).*

Parameeter t on tavaliselt reaalarvuline muutuja, mida sageli tõlgendatakse ajana. Hulka T nimetatakse juhusliku protsessi indekshulgaks. Kui T on loenduv hulk, siis ütleme, et juhuslik protsess on diskreetse ajaga protsess (näiteks $T = \{0, 1, 2, \dots\}$). Kui T on intervall reaalteljel, siis ütleme, et juhuslik protsess on pideva ajaga protsess.

Definitsioon 15.2. *Hulka S, mille elementideks on $X(t)$ kõikvõimalikud väärtused, nimetatakse protsessi seisundi ruumiks ning $X(t)$ on protsessi seisund ajamomendil t (vt. [2]).*

Näide 15.1. Ajamomendil t parklas olevate autode arv $X(t)$ on pideva ajaga protsess, mille seisundite hulk $S = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$. $\diamond$

Näide 15.2. Olgu $X(t)$ vee tase tammi taga ajamomendil t. See on pideva ajaga juhuslik protsess, mille seisundite hulk $S = [0, a]$ on teatav intervall. $\diamond$

15.2 Juhuslik ekslemine

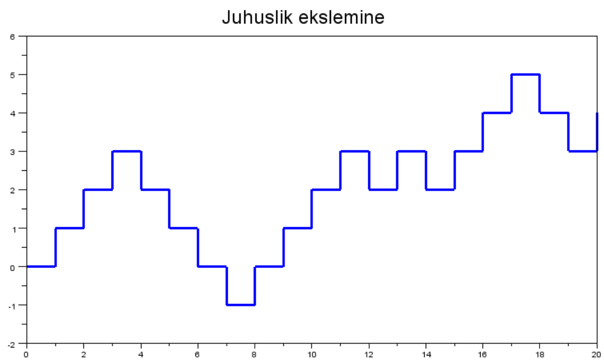
Definitsioon 15.3. *Juhuslik ekslemine (random walk) W_t on defineeritud reaalteljel, alustades väärtusest $W_0 = 0$ ja liikudes igas täisarvulises punktis $t = i \in \mathbb{N}$ sammu s_i võrra üles või alla. Siinjuures sammud s_i on võrdse jaotusega sõltumatud juhuslikud suurused.*

Definitsioon 15.4. *Olgu juhuslikud suurused*

$$s_i = \left\{ \begin{array}{ll} +1, & \textit{tõenäosusega } \frac{1}{2} \\ -1, & \textit{tõenäosusega } \frac{1}{2} \end{array} \right\}. \tag{15.1}$$

Diskreetseks Brown'i liikumiseks nimetatakse juhuslikku ekslemist

$$W_t = W_0 + s_1 + s_2 + \cdots + s_t, \quad t = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15.2}$$



```
clear
function yy = ekslemine( N )
    yy = zeros( 1 , N )
    for i = 1 : N-1
        if grand( 1 , 1 , "def" ) > 1/2 then
            yy( i+1 ) = yy( i ) + 1
          else
            yy( i+1 ) = yy( i ) - 1
        end
    end
endfunction
   N = 20             // Sammude arv
samm = 500            // Graafiku tihendamiseks
   M = samm*N         // Graafiku peal olevate sõlmede arv
yy = ekslemine( N + 1 )
cc = zeros( 1 , M + 1 )  // Graafiku väärtused
for i= 1 : M
    cc( i + 1 ) = yy( floor( i/samm ) + 1 )
end
gcf() ; scf( 0 ) ; clf( 0 ) ;
plot( [ 0 , 0 ] , [ max(cc)+1, min(cc)-1 ] , "-"  )
plot( [ 0 : 1/samm : N ] , cc , "-" , "Linewidth" , 3 )
title( "Juhuslik ekslemine" , "fontsize" , 5 )
```

Diskreetse Brown'i liikumise W_t ühe sammu s_i keskväärtus $E(s_i) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-1) = 0$ ja dispersioon $D(s_i) = E\left[(s_i - E(s_i))^2\right] = E\left[(s_i - 0)^2\right] = \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{2}\cdot(-1)^2 = 1$. Siinjuures diskreetse Brown'i liikumise W_t enda keskväärtus on

$$E(W_t) = E(s_1 + \cdots + s_t) = E(s_1) + \cdots + E(s_t) = 0$$

ja dispersioon

$$D(W_t) = D(s_1 + \cdots + s_t) = D(s_1) + \cdots + D(s_t) = t.$$

Seega standardhälve $\sigma(W_t) = \sqrt{D(W_t)} = \sqrt{t}$.

15.3 Pidev Brown'i liikumine

Inglise botaanik Robert Brown (1773 - 1858) avastas, et vedeliku pinnale raputatud õietolmu osakesed hakkavad kaootiliselt liikuma. Füüsik Albert Einstein (1879 - 1955) andis sellele nähtusele füüsikalise selgituse - õietolmu osakesi pommitavad vee molekulid. Ameerika matemaatik Norbert Wiener (1894 - 1964) esitas nähtuse kirjeldamiseks matemaatilise mudeli, mida tuntakse Brown'i liikumise (või ka Wiener'i protsessi) nime all (vt. [2]).

Kui me võtame diskreetses Brown'i liikumises W_t kaks korda rohkem liikmeid, siis dispersioon läheb kaks korda suuremaks, $D(W_{2t}) = 2t$ ja standardhälve $\sigma(W_{2t}) = \sqrt{2}\sqrt{t}$. Kui me võtame k korda rohkem liikmeid, siis $\sigma(W_{kt}) = \sqrt{k}\sqrt{t}$. Seega, dispersiooni säilitamiseks samal tasemel $\sqrt{t}$ tuleks meil Brown'i liikumise pideva juhu jaoks juhuslikud suurused s_i läbi jagada suurusega $\sqrt{k}$ (muidu läheb vertikaalne liikumine „liiga suureks“).

Tähistame W_t^k juhuslikku ekslemist, mis igal ajasammul i kasutab ühtlaselt jaotunud sõltumatuid juhuslikke suurusi s_i^k horisontaalse sammuga $\frac{1}{k}$ ja kõrgusega

$$s_i^k = \frac{1}{\sqrt{k}} \left\{ \begin{array}{l} +1, \text{ tõenäosusega } \frac{1}{2} \\ -1, \text{ tõenäosusega } \frac{1}{2} \end{array} \right\}. \tag{15.3}$$

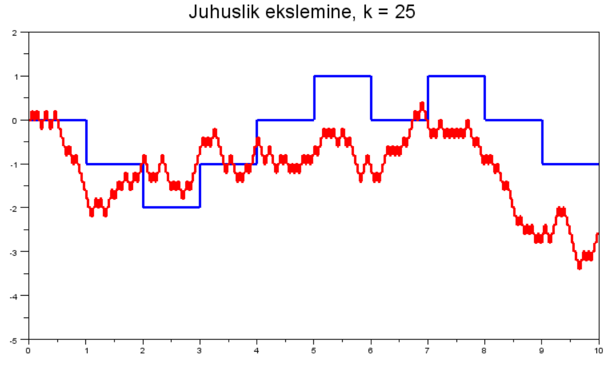
Sel juhul keskväärtus

$$E(W_t^k) = \sum_{i=1}^{kt} E(s_i^k) = \sum_{i=1}^{kt} 0 = 0$$

ja dispersioon

$$D(W_t^k) = \sum_{i=1}^{kt} D(s_i^k) = \sum_{i=1}^{kt} \left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2 \frac{1}{2} \right) = kt\frac{1}{k} = t.$$

Kui me suurendame k väärtust, siis protsessi W_t^k keskväärtus ja standardhälve jäävad samaks. Joonisel on toodud diskreetne Brown'i liikumine $k = 1$ ja $k = 25$ korral.



Diskreetse protsessi pidevaks laiendamiseks lähtume lihtsast sümmeetrilisest juhuslikust ekslemisest, kus me laseme nii aja- kui ruumisammul läheneda nullile.

Definitsioon 15.5. *Olgu t reaalarv $t \in [0, \infty)$. Piirväärtust W_t^∞ protsessis $k \to \infty$ nimetatakse pidevaks Brown'i liikumiseks ja tähistatakse B_t.*

Pideval Brown'i liikumisel on järgmised kolm tähtsat omadust:

1. iga $t > 0$ korral on B_t normaaljaotusega $N(0, \sqrt{t})$, s.t. keskväärtusega 0 ja dispersiooniga t;
2. iga $0 \leq t_1 < t_2$ korral normaaljaotusega juhuslik suurus $B_{t_2} - B_{t_1}$ on sõltumatu suurusest B_{t_1} ja täpsemalt: juurdekasv $B_{t_2} - B_{t_1}$ on sõltumatu kõigist suurustest B_s, kus $0 \leq s \leq t_1$;
3. Brown'i liikumise B_t trajektoorid on muutuja t järgi pidevad funktsioonid.

Pideva Brown'i liikumise B_t realiseerimiseks arvutil moodustame sõlmed

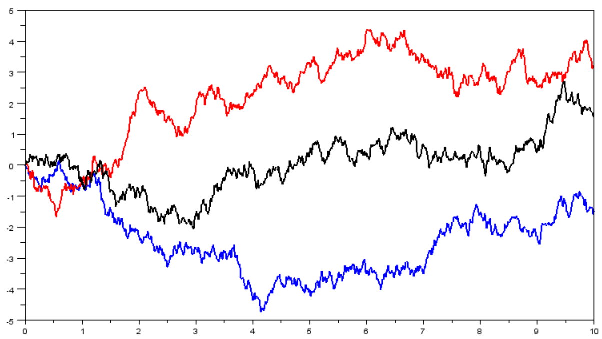
$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots \leq t_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alustame väärtusest $B_0 = 0$. Omaduste 1 ja 2 põhjal juhuslik suurus $B_{t_1} - B_{t_0}$ on normaaljaotusega $N(0, \sqrt{t_1}) = \sqrt{t_1 - t_0} N(0, 1)$, s.t. võime võtta standardse normaaljaotusega juhusliku arvu ja korrutada selle suurusega $\sqrt{t_1 - t_0}$. Väärtuse B_{t_2} leidmiseks valime analoogiliselt juhusliku arvu normaaljaotusest $N(0, \sqrt{t_2 - t_1}) = \sqrt{t_2 - t_1} N(0, 1)$ ja saadud tulemuse liidame arvule B_{t_1} jne.

```
clear
function [ xx , yy ] = BrowniLiikumine( samm , N )
    hh = 1/samm                     // sammu pikkus
    xx = hh*( 0 : N-1 )             // sõlmed
    yy = zeros( xx )                // juhuslikud arvud B_t
  for i = 2 : length( yy )
    yy( i ) = yy( i - 1 ) + sqrt(hh)*grand(1,1,"nor",0,1)
    // maatriks mõõtmetega (1,1),normaaljaotus,EX=0,sigma=1
  end
endfunction
```

```
gcf() ; scf( 1 ) ; clf( 1 ) ;
[ xx , cc ] = BrowniLiikumine( 100 , 1001 )
plot( xx , cc , "b-" , "Linewidth" , 2 )
```

Joonisel on toodud erinevad pideva Brown'i liikumise B_t realiseerumised programmis kasutatud sammuga $t_{i+1} - t_i = \frac{1}{100}$.



15.4 Stohhastilised diferentsiaalvõrrandid

Stohhastilise diferentsiaalvõrrandi lahenditeks on juhuslikud (stohhastilised) protsessid. Iga deterministlikku funktsiooni $f(t)$ saab vaadelda juhusliku protsessina, mille standardhälve on null. Võrrandi

$$\begin{aligned} dy &= r\,dt + \sigma\,dB_t, \quad r, \sigma \in \mathbb{R} \\ y(0) &= 0. \end{aligned} \tag{15.4}$$

lahend $y(t) = r\,t + \sigma\,B_t$ on juhuslik protsess. Siin B_t on pidev Brown'i liikumine.

Märkus 15.1. *Paneme tähele, et stohhastiline diferentsiaalvõrrand on antud diferentsiaalide, mitte tuletiste kaudu. Selle põhjuseks on asjaolu, et paljud juhuslikud protsessid ei ole diferentseeruvad. Oma olemuselt on võrrand*

$$dy = f(t, y)dt + g(t, y)dB_t \tag{15.5}$$

integraalvõrrand

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f(s, y)\,ds + \int_0^t g(s, y)\,dB_s, \tag{15.6}$$

kus $\int_0^t g(s, y)\,dB_s$ *on Ito integraal.*

Olgu lõigul $[a, b]$ antud sõlmed

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Sel juhul Riemann'i integraal on defineeritud piirväärtusena

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}), \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Definitsioon 15.6. *Olgu B_t pidev Brown'i liikumine. Piirväärtust*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(t_{i-1})(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \tag{15.7}$$

nimetatakse Ito integraaliks ja tähistatakse $I = \int_a^b f(t)\,dB_t$ (see on samaväärne kirjutisega $dI = f dB_t$).

Definitsiooni järgi on lihtne leida, et $\int_0^t dB_s = B_t$. Tõepoolest, võttes lõigul $[0, t]$ sõlmed $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_N = t$, saame

$$\int_0^t dB_s = \lim_{\Delta s \to 0} \sum_{i=1}^{N} (B_{s_i} - B_{s_{i-1}}) = \lim_{\Delta s \to 0} (B_t - B_0) = B_t.$$

Definitsioon 15.7. *Diferentsiaali dB_t nimetatakse valgeks müraks.*

15.5 Täpne lahendamine

Näide 15.3. Lahendada stohhastiline diferentsiaalvõrrand

$$dy(t) = r\,dt + \xi\,dB_t, \quad y(0) = y_0, \quad r, \xi \in \mathbb{R}.$$

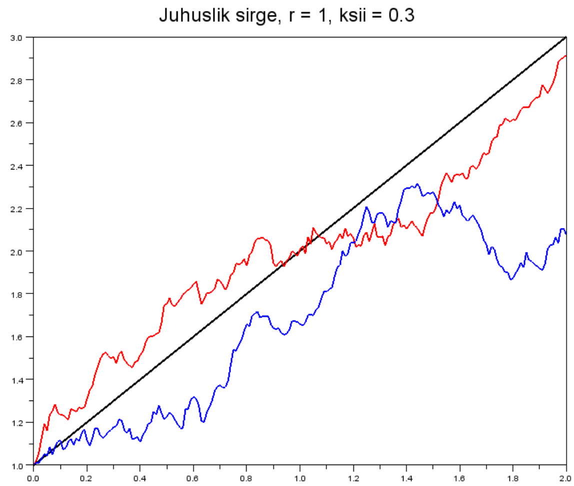
Vastava hariliku diferentisaalvõrrandi $y'(t) = r$ lahend on sirge $y(t) = r\,t + y_0$. Meil on aga võrrand $dy(t) = r\,dt + \xi\,dB_t$. Integreerime võrduse mõlemat poolt,

$$y(t) - y(0) = r\,t + \xi \int_0^t dB_s = r\,t + \xi B_t.$$

Seega esialgse võrrandi lahendiks on juhuslikud protsessid

$$y(t) = r\,t + y_0 + \xi B_t.$$

Joonisel on toodud sirge $y(t) = t + 1$ lõigul $t \in [0, 2]$ ja kaks erinevat juhuslikku protsessi $y(t) = t + 1 + 0.3B_t$.



Märgime, et sirge $y(t) = t+1$ on samuti esialgse stohhastilise võrrandi lahend, sel juhul „müra“ võrdub nulliga (tõsi, sellise sirge „realiseerumine“ on väga vähe tõenäoline). $\diamond$

Märkus 15.2. *Kui $y = f(t,x)$ on juhuslik protsess, siis kehtib **Ito valem** diferentsiaalkujul*

$$\boxed{dy = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\,dx\,dx} \tag{15.8}$$

kus liiget $dx\,dx$ tõlgendatakse selliselt, et kehtivad samasused

$$\boxed{dt\,dt = 0, \quad dt\,dB_t = dB_t\,dt = 0, \quad dB_t\,dB_t = dt} \tag{15.9}$$

Ito valem on analoog diferentsiaalarvutuse ahela reeglile stohhastiliste protsesside jaoks. Kuigi valem on antud diferentsiaalkujul, siis olemuselt on tegemist jällegi integraalvõrrandiga.

Näide 15.4. Tõestada, et $y(t) = B_t^2$ on võrrandi

$$dy = dt + 2B_t\,dB_t$$

lahend.

Ito valemi kasutamiseks kirjutame y kujule $y = f(t,x)$, kus $x = B_t$ ja $f(t,x) = x^2$. Seega

$$\begin{aligned} dy &= f_t dt + f_x dx + \frac{1}{2} f_{xx}\,dx\,dx = 0\,dt + 2x\,dx + \frac{1}{2}2\,dx\,dx \\ &= 2\,B_t dB_t + dB_t\,dB_t = 2\,B_t dB_t + dt. \end{aligned}$$

$\diamond$

Näide 15.5. Näidata, et geomeetriline Brown'i liikumine

$$y(t) = y_0 e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right) t+\sigma B_t}$$

on võrrandi

$$dy(t) = r\, y(t)\, dt + \sigma\, y(t)\, dB_t$$

lahend.

Ito valemi kasutamiseks kirjutame y kujule $y = f(t,x)$, kus $x = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t$ ja $f(t,x) = y_0 e^x$. Seega

$$dy = y_0 e^x\, dx + \frac{1}{2} y_0 e^x\, dx\, dx,$$

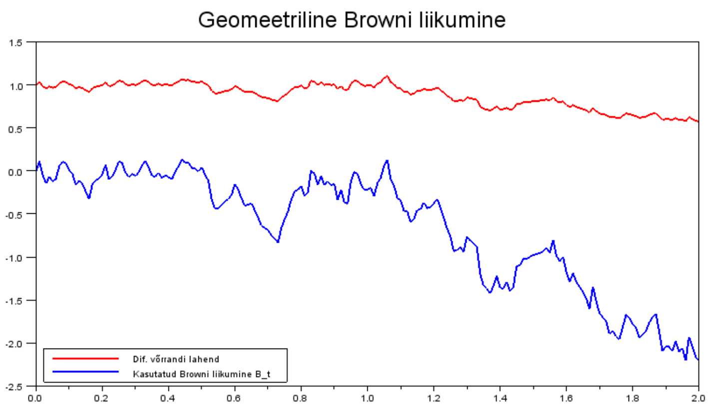
kus

$$dx = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + \sigma\, dB_t.$$

Ito valemiga kaasnevatest lihtsustustest saame, et $dx\, dx = \sigma^2\, dt$ ja

$$\begin{aligned} dy &= y_0 e^x \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt + y_0 e^x \sigma\, dB_t \\ &+ \frac{1}{2} y_0\, \sigma^2\, e^x dt = y_0 e^x\, r\, dt + y_0\, e^x\, \sigma\, dB_t = r\, y\, dt + \sigma\, y\, dB_t. \end{aligned}$$

Joonisel on toodud lahend $y(t) = e^{\left(0.1-\frac{1}{2}0.3^2\right)t+0.3B_t}$ lõigul $t \in [0,2]$. Lisaks on kuvatud arvutamisel kasutatud pideva Brown'i liikumise B_t realisatsioon.



Geomeetriline Brown'i liikumine on laialt kasutusel finantsmatemaatika mudelites, näiteks Black-Scholes'i tüüpi võrrandites, mis modelleerivad väärtpaberite väärtusi (sel juhul r on kasvuparameeter ja σ on difusiooniparameeter). $\diamond$

15.6 Ligikaudne lahendamine

Vaatleme stohhastilist diferentsiaalvõrrandit

$$\begin{aligned} dy(t) &= f(t,y)\,dt + g(t,y)\,dB_t \\ y(a) &= y_a. \end{aligned} \tag{15.10}$$

Ligikaudseks lahendamiseks saame kasutada analoogilisi ühesammulisi meetodeid, nagu me kasutasime harilike diferentsiaalvõrrandite korral. Moodustame lõigul $[a,b]$ sõlmed

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Euler-Maruyama meetod

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(t_i,y_i)(t_{i+1}-t_i) + g(t_i,y_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}), \quad i = 0,1,2,\ldots,N-1} \tag{15.11}$$

Kuidas leida juhuslikku suurust $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$? Selleks defineerime juhusliku suuruse z_i normaaljaotusega, keskväärtusega 0 ja hälbega 1. Sel juhul

$$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} = z_{i+1}\sqrt{t_{i+1}-t_i}, \quad i = 0,1,2,\ldots,N-1. \tag{15.12}$$

Arvutis piisab z_i leidmiseks kasutada mingit vastavat juhusliku arvu genereerimise käsku, näiteks *grand(1 , 1 , "nor", 0 , 1)*. Seega võrdsete vahemikega sõlmede korral

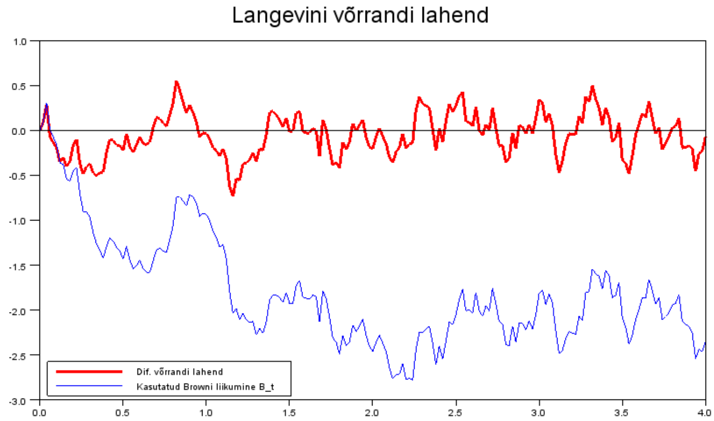
$$\boxed{\begin{aligned} & y_{i+1} = y_i + h\,f(t_i,y_i) + \sqrt{h}\,z_{i+1}\,g(t_i,y_i) \\ & z_{i+1} = grand(1,1,\text{"}nor\text{"},0,1), \quad i = 0,1,2,\ldots,N-1 \end{aligned}} \tag{15.13}$$

Näide 15.6. Vaatleme **Langevin'i võrrandit**

$$dy = -r\,y\,dt + \sigma\,dB_t, \tag{15.14}$$

kus r ja σ on positiivsed konstandid. Langevin'i võrrandi lahendit, juhuslikku protsessi $y(t)$, nimetatakse ka **Ornstein-Uhlenbeck'i protsessiks**. Antud võrrandiga saab modelleerida süsteeme, kus taustmüra olemasolul lahend pöördub tagasi teatud olekusse, meie juhul $y = 0$. Näiteks süsteemi, kus auto sõidab mööda auklikke Tallinna tänavaid, autos olevas kausis on ping-pongi pall ja $y(t)$ näitab palli asukohta kausi kekspunktist.

Joonisel on toodud Euler-Maruyama meetodiga leitud lahend lõigul $[0,4]$, $y(0) = 0$, $r = 10$, $\sigma = 1$ ja $N = 200$ korral. Sinisega on lisatud vastav pideva Brown'i liikumise realiseerumine B_t.



$\diamond$

Tekib küsimus, kuidas mõista ligikaudse meetodi täpsust (järku) juhuslike protsesside jaoks? Peame arvestama, et lahend $y(t)$ mingi ühe Brown'i liikumise B_t jaoks on ainult üks protsessi realiseerumine. Brown'i liikumise B_t mingi teine realiseerumine tekitab ka visuaalselt täiesti erineva lahendi $y(t)$.

Definitsioon 15.8. *Olgu y stohhastilise võrrandi* (15.10) *täpne lahend ja w ligikaudne lahend. Stohhastilise võrrandi lahendamisel kasutatav ühesammuline meetod on m-järku, kui iga aja $t > 0$ korral absoluutse vea keskväärtus on järku $O(h^m)$, s.t. protsessis $h \to 0$ kehtib võrdus*

$$E(|y(t) - w(t)|) = O(h^m). \tag{15.15}$$

Märkus 15.3. *Euler-Maruyama meetod on järku $m = \frac{1}{2}$ (vt. [3]).*

Märkus 15.4. *Erinevalt harilikest diferentsiaalvõrranditest, ei ole ligikaudse meetodi täpsus stohhastiliste diferentsiaalvõrrandite jaoks nii oluline küsimus. Deterministlike süsteemide korral on süsteemi algolek väga täpselt teada ja ka edaspidi huvitab meid vastava täpsuse säilitamine. Juhuslike protsesside korral on juba süsteemi algolek tihti mingil määral ebatäpne ja edasine süsteemi käitumine on nagunii juhuslik.*

1-järku stohhastiline Runge-Kutta meetod

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} =& y_i + f(t_i, y_i)(t_{i+1} - t_i) + g(t_i, y_i)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{t_{i+1} - t_i}} \left(g(t_i, y_i + g(t_i, y_i)\sqrt{t_{i+1} - t_i}) - g(t_i, y_i) \right) \cdot \\ &\cdot \left((B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 - (t_{i+1} - t_i) \right) \\ i =& 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}} \tag{15.16}$$

Võrdsete vahemikega sõlmede korral saame veidi lihtsama kuju:

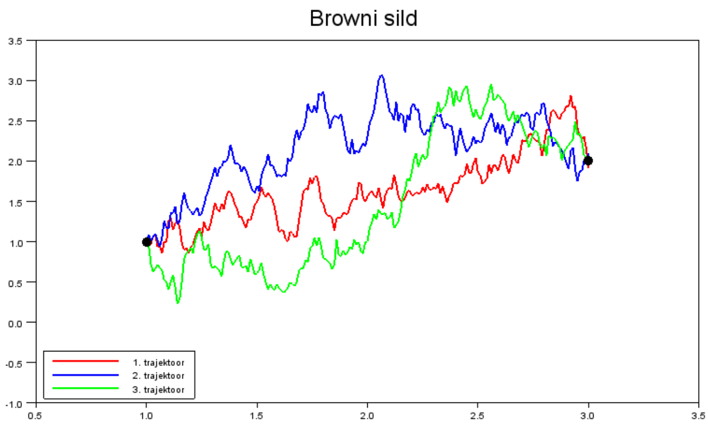
$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} =& y_i + h\, f(t_i, y_i) + \sqrt{h}\, z_{i+1}\, g(t_i, y_i) \\ &+ \frac{\sqrt{h}}{2} \left(g(t_i, y_i + \sqrt{h}\, g(t_i, y_i)) - g(t_i, y_i) \right) (z_{i+1}^2 - 1) \\ z_{i+1} =& grand(1, 1, "nor", 0, 1), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}} \tag{15.17}$$

Näide 15.7. Vaatleme **Brown'i silla** stohhastilist võrrandit

$$dy = \frac{y_* - y}{t_* - t} dt + dB_t, \quad y(t_0) = y_0, \tag{15.18}$$

kus y_* ja $t_* > t_0$ on ette antud arvud.

Joonisel on toodud Brown'i sillad, mis ühendavad punkte $(1, 1)$ ja $(3, 2)$. Võrrandi lahendamisel on kasutatud 1-järku stohhastilist Runge-Kutta meetodit, $N = 200$.



Brown'i silla abil saab modelleerida süsteeme, mille lahend peab ühendama kahte kindlat punkti. Iga selline juhuslik „sild" alustab algpunktist (t_0, y_0) ja lõppeb teises punktis (t_*, y_*). $\diamond$

15.7 Black-Scholes'i optsioonide hindamise mudel

Definitsioon 15.9. *Optsioon (Option) annab omanikule õiguse, aga mitte kohustuse kindlaksmääratud hinnaga osta või müüa mingit kindlaksmääratud finantsvara (näiteks aktsia) kindlaksmääratud ajal tulevikus.*

Vastavalt olukorrale räägitakse kas ostu- või müügioptsioonist. Kui optsiooni omanik saab oma õigust realiseerida ainult ajaperioodi lõpphetkel, siis on tegemist Euroopa tüüpi optsiooniga (*European Call Option*). Ameerika tüüpi optsiooni puhul on võimalik oma õigust kasutada kogu ajaperioodi vältel (vt. [1]).

Ostuoptsiooni aluseks oleva aktsia tegelik turuhind $X(t)$ võib kokku lepitud ajahetkeks $t = T$ tõusta kõrgemale varem kokkulepitud tehinguhinnast K. Sel juhul optsiooni omanik realiseerib ajahetkel T oma ostuõiguse, mis järel müüb hinnaga K ostetud aktsiad turul kõrgema hinnaga (turuhinnaga) $X(T)$ edasi ning teenib seeläbi kasumit $X(T) - K$. Optsiooni väljakirjutaja võib kanda sama suurt „kahju" (kui ta just vahepeal midagi ette ei võta) (vt. [1]).

Näide 15.8. Olgu ABC korporatsiooni aktsia hind (näiteks täna) $K = 12\$$. Oletame, et me saame õiguse (kuid mitte kohustuse) osta sama aktsia 6 kuu pärast hinnaga $K = 15\$$. Tekib küsimus, milline on sellise ostuoptsiooni **õiglane** väärtus tänasel päeval (näiteks tahaksime selle õiguse edasi müüa) või mõnel muul päeval enne tähtaja saabumist? $\diamond$

1960-ndatel uurisid Fischer Black ja Myron Scholes hüpoteesina geomeetrilise Brown'i liikumise

$$dX(t) = m\,X(t)\,dt + \sigma\,X(t)\,dB_t$$

sobivust aktsia hinna $X(t)$ jaoks. Siin m on aktsia suhtelise hinnamuutuse parameeter ehk triiv ja σ on difusiooni (volatiilsuse) parameeter. Mõlemat parameetrit saab hinnata turul juba realiseerunud andmete järgi. Olgu turul võimalik rahahoiuselt teenida riskivabalt tulu intressiga r. Black ja Scholes vahetasid triivi m välja intressiga r. Siis

$$\boxed{dX(t) = r\,X(t)\,dt + \sigma\,X(t)\,dB_t} \tag{15.19}$$

Kasutame järgnevalt tähistusi:

- T on optsiooni aegumistähtaeg (*exercise date*, kokkulepitud aeg aastates, mille järel finantsvaratehing peab reaalselt toimuma).
- K on ette määratud ja kokku lepitud optsiooni täitmishind (*strike price*).
- $X(t)$ on fikseeritud finantsvara (aktsia) tegelik turuhind suvalisel ajahetkel t.
- r on aastane riskivaba intressimäär (näiteks raha hoiustamisel pangas).
- σ on standardhälve, ka juhusliku komponendi osakaalu kirjeldav konstant (alusvara risk, volatiilsus).
- $C(X,T)$ on ostuoptsiooni (aegumistähtajaga T) väärtus.

Võttes ette aktsia turuhinna $X_0 = X(0)$ alghetkel $t = 0$, siis aegumistähtajaga T optsiooni väärtus on esitatav võimalike kasumite keskväärtuse kaudu valemiga

$$C(X_0, T) = e^{-rT} E(\max(X(T) - K, 0)), \tag{15.20}$$

kus $X(T)$ on stohhastilise võrrandi (15.19) lahendi $X(t)$ väärtus hetkel T.

Optsiooni väärtus $C(X_0, T)$ sõltub juhuslikust suurusest $X(T)$, mida saab leida ainult arvutisimulatsiooni abil (lahendades vastavat stohhastilist diferentisaalvõrrandit). Black ja Scholes tuletasid 1973. aastal ostuoptsiooni hinna jaoks **Black-Scholes'i valemi**:

$$\boxed{C(X_0, T) = X_0\, N(d_1) - K\, e^{-r\,T}\, N(d_2)} \tag{15.21}$$

kus

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds \tag{15.22}$$

on standardse normaaljaotuse $N(0,1)$ jaotusfunktsioon $N(x)$, mille saab SciLab'is ja MatLab'is leida järgmiselt:

$$N(x) = \frac{1 + erf(x/\sqrt{2})}{2}.$$

Konstandid d_1 ja d_2 leitakse seostega

$$d_1 = \frac{\ln\frac{X_0}{K} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\, T}{\sigma\,\sqrt{T}}, \quad d_2 = \frac{\ln\frac{X_0}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\, T}{\sigma\,\sqrt{T}}. \tag{15.23}$$

Euroopa müügioptsiooni (*European Put Option*) väärtus arvutatakse valemitega

$$P(X_0, T) = e^{-rT} E(\max(K - X(T), 0)) \tag{15.24}$$

ja vastav Black-Scholes'i valem:

$$\boxed{P(X_0, T) = K\, e^{-r\,T}\, N(-d_2) - X_0\, N(-d_1)} \tag{15.25}$$

Näide 15.9. Vaatleme seda sama ABC aktsiat, mille hetkehind on $X_0 = 12\$$. Täitmishind $K = 15\$$. Olgu aastane intressimäär 5%, $r = 0.05$ ja volatiilsus 25%, $\sigma = 0.25$. Milline on ostuoptsiooni väärtus $C(X_0, T)$ ja müügioptsiooni $P(X_0, T)$ väärtus täna, kui õigus aktsiat osta realiseerub kuue kuu pärast ($T = \frac{6}{12} = 0.5$)? Märgime, et volatiilsus 25% tähendab standardhäbena, et aastas võib aktsia hind muutuda u. 2/3 juhtudest skaalal $12 \pm 3 = 9 \ldots 15$.

Black-Scholes'i valemi järgi saame, et

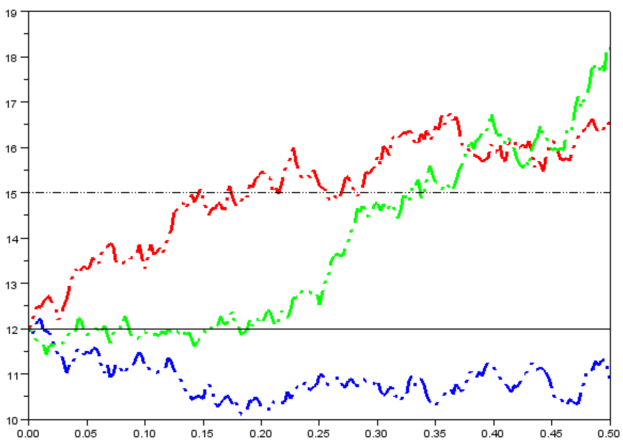
$$K = 15 \quad \Rightarrow \quad C(12, 0.5) = 0.1538, \quad P(12, 0.5) = 2.7835.$$

Märgime, et väärtused 1 kuu enne tähtaega (siis $T = \frac{1}{12}$) on

$$K = 15 \quad \Rightarrow \quad C(12, \frac{1}{12}) = 0.0003, \quad P(12, \frac{1}{12}) = 2.9380.$$

On loogiline, et mida lähemale tuleb tähtaeg, siis õigus osta kallimalt muutub järjest vähem väärtuslikumaks ja õigus müüa kallimalt muutub järjest rohkem väärtuslikuks.

Lisame siia joonisena Euler-Maruyama meetodiga leitud aktsia hinna $X(t)$ võimalikud erinevad kõikumised.



Kui lahendada Euler-Maruyama meetodiga 20000 ülesannet aktsia hinna $X(T)$ leidmiseks (osalõikude arv $N = 200$), siis saame ostu- ja müügioptsioonide väärtuseks (kasutades keskväärtusi sisaldavaid valemeid):

$$K = 15 \quad \Rightarrow \quad C(12, 0.5) \approx 0.1540, \quad P(12, 0.5) \approx 2.7841.$$

Tulemused on väga lähedased Black-Scholes'i valemitega saadud väärtustele. Kui me lahendaksime oluliselt vähem ülesandeid, siis erineks tulemus rohkem. $\diamond$

Viited

[1] K. Pärna. Martingaalid (loengukonspekt). Tartu Ülikool, 2006.

[2] K. Pärna. Tõenäosusteooria algkursus. Tartu Ülikool, 2013.

[3] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.