

## 4 Mitmesammulised meetodid

### Sisukord

<b>4 Mitmesammulised meetodid</b>	<b>42</b>
4.1 Mitmesammulised meetodid . . . . .	43
4.2 Mitmesammuliste meetodite stabiilsus . . . . .	46
4.3 Ilmutamata meetodid . . . . .	50
4.4 Prognoosi ja korrektsioonimeetod . . . . .	52

#### Märksõnad

1. Mitmesammulised meetodid.
2. Ilmutatud ja ilmutamata skeemid.
3. Mitmesammuliste meetodite stabiilsus ja mittestabiilsus.
4. Stabiilse meetodi nõrk ja tugev stabiilsus.
5. Prognoosi ja korrektsiooni meetodid

### 4.1 Mitmesammulised meetodid

Ühesammulised meetodid, nagu näiteks Runge-Kutta meetodid, arvestasid  $y_{i+1}$  leidmisel ainult viimati arvutatud lähislahendi  $y_i$  väärtust, seejuures tehti palju lisaarvutusi tulemuse täpsustamiseks. Selline lähenemine on algtingimustega ülesannete puhul loomuomane.

Mitmesammuliste meetodite puhul üritatakse ära kasutada seni leitud lahendist rohkem väärtusi  $y_{i-k}, \dots, y_i$  (nn. lahendis endas peituvat informatsiooni), kusjuures igal sammul arvutatakse juurde ainult üks funktsiooni  $f$  väärtus  $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ .

**Adams'i-Bashforth'i kahesammuline ilmutatud meetod,**

$$y_{i+1} = y_i + h \left[ \frac{3}{2}f(x_i, y_i) - \frac{1}{2}f(x_{i-1}, y_{i-1}) \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

Osutub, et see on teist järku meetod. Paneme tähele, et skeem vajab algtabelina väärtusi  $y_0$  (antud) ja  $y_1$  (tundmatu, mille võib näiteks leida mingi Runge-Kutta meetodiga). Toome võrdluseks ära teist järku Runge-Kutta meetodina keskpunkti meetodi,

$$y_{i+1} = y_i + h f \left( x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Võrdluseks:

2-sammuline meetod	1-sammuline meetod
$y_1 =$ leida mingi valitud meetodiga	$y_1 = y_0 + h f \left( x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) \right)$
$y_2 = y_1 + h \left( \frac{3}{2}f(x_1, y_1) - \frac{1}{2}f(x_0, y_0) \right)$	$y_2 = y_1 + h f \left( x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} f(x_1, y_1) \right)$
$y_3 = y_2 + h \left( \frac{3}{2}f(x_2, y_2) - \frac{1}{2}f(x_1, y_1) \right)$	$y_3 = y_2 + h f \left( x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2} f(x_2, y_2) \right)$
$y_4 = y_3 + h \left( \frac{3}{2}f(x_3, y_3) - \frac{1}{2}f(x_2, y_2) \right)$	$y_4 = y_3 + h f \left( x_3 + \frac{h}{2}, y_3 + \frac{h}{2} f(x_3, y_3) \right)$

Näeme, et Runge-Kutta 2. järku meetodis tuleb igal sammul teha kaks uut funktsiooni  $f$  väärtuse arvutamist, kuid kahesammulises meetodis ainult üks uus funktsiooni  $f$  väärtus (kõik ülejäänud väärtused on varem leitud,  $f$  väärtusi arvutatakse ainult „täissõlmedes“  $x_i$  ja need salvestatakse arvutis eraldi vektorisse).

Edaspidi tähistame funktsiooni  $f$  väärtusi punktis  $(x_i, y_i)$  järgmiselt:

$$f_i := f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

**Definitsioon 4.1**

Üldiseks  $q$ -sammuliseks ( $q \in \mathbb{N}$ ) meetodiks nimetatakse skeemi

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \dots + \alpha_{q-1} y_{i-q+1} + h \left[ \beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \dots + \beta_{q-1} f_{i-q+1} \right],$$

$$i \geq q-1, \quad (4.3)$$

kus  $\{\alpha_i\}$  ja  $\{\beta_i\}$  on mingid konstandid. Valemit (4.3) nimetatakse ilmutatud valemiks, kui  $\beta_{-1} = 0$  ning ilmutamata valemiks, kui  $\beta_{-1} \neq 0$ .

**Märkus 4.1**

Valemis (4.3) toodud meetodeid nimetatakse vastavalt ilmutatud ja ilmutamata Adams'i meetoditeks, kui  $\alpha_0 = 1$  ja  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$ .

**Märkus 4.2**

Vanemas eesti- ja venekeelses kirjanduses kasutatakse mitmesammuliste meetodide kohta mõistet „diferentsmeetodid“.

Näitame kahesammulise meetodi varal ( $q = 2$ ), kuidas mitmesammulisi meetodeid tuletatakse ja millised nendest töötavad hästi ja millised mitte. Üldine kahesammuline meetod on antav valemiga

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + h \left[ \beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} \right], \quad i \geq 1. \quad (4.4)$$

Analoogiliselt Ruge-Kutta meetodite juures tehtuga, arendame võrrandi  $y' = f(x, y)$  lahendi  $y$  Taylor'i ritta punktis  $x_i$  (jättes lahtiseks, mitu liiget meil täpselt vaja on),

$$y(x) = y(x_i) + y'(x_i)(x-x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x-x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x-x_i)^3 + \dots \quad (4.5)$$

Oletades, et eelnevad väärtused  $y_0, y_1, \dots, y_i$  on leitud täpselt, saame  $y(x_i) = y_i$ . Kirjutame valemi (4.5) välja punktis  $x = x_{i+1}$  ja  $x = x_{i-1}$ ,

$$y_{i+1} = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''_i + \frac{h^4}{24} y''''_i + \dots, \quad (4.6)$$

$$y_{i-1} = y_i - h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i - \frac{h^3}{6} y'''_i + \frac{h^4}{24} y''''_i - \dots \quad (4.7)$$

Arvestades, et  $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$ , tähistame  $y'_i = f_i$  ning meie meetod võtab kuju

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + h \left[ \beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \beta_1 f_{i-1} \right]$$

$$= \alpha_0 y_i + \alpha_1 y_{i-1} + h \left[ \beta_{-1} y'_{i+1} + \beta_0 y'_i + \beta_1 y'_{i-1} \right]. \quad (4.8)$$

Järgnevalt seome  $y$  ja tema tuletiste väärtuste arvutamise punktiga  $x_i$ . Selleks tuleb  $y'_{i+1}$  ja  $y'_{i-1}$  jaoks võtta tuletis võrrandi (4.5) mõlemast poolest ning kirjutada tulemus välja punktis  $x_{i+1}$  ja  $x_{i-1}$ . Saame

$$\begin{aligned}
y_{i+1} = & \alpha_0 \left[ y_i \right. \\
& + \alpha_1 \left[ y_i \quad -h y'_i \quad + \frac{h^2}{2} y''_i \quad - \frac{h^3}{6} y'''_i \quad + \frac{h^4}{24} y''''_i \quad - \dots \right. \\
& + \beta_{-1} \left[ \quad \quad \quad h y'_i \quad + h^2 y''_i \quad + \frac{h^3}{2} y'''_i \quad + \frac{h^4}{6} y''''_i \quad + \dots \right. \\
& + \beta_0 \left[ \quad \quad \quad h y'_i \right. \\
& + \beta_1 \left[ \quad \quad \quad h y'_i \quad - h^2 y''_i \quad + \frac{h^3}{2} y'''_i \quad - \frac{h^4}{6} y''''_i \quad + \dots \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \right] \right] \right] \right] \right] \cdot \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Meie üldise kahesammulise meetodi saab kokku võtta järgmiselt:

$$\begin{aligned}
y_{i+1} = & \left[ \alpha_0 + \alpha_1 \right] y_i + \left[ -\alpha_1 + \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 \right] h y'_i + \left[ \alpha_1 + 2\beta_{-1} - 2\beta_1 \right] \frac{h^2}{2} y''_i \\
& + \left[ -\alpha_1 + 3\beta_{-1} + 3\beta_1 \right] \frac{h^3}{6} y'''_i + \left[ \alpha_1 + 4\beta_{-1} - 4\beta_1 \right] \frac{h^4}{24} y''''_i + \dots \quad (4.10)
\end{aligned}$$

Kirjutame uuesti võrdluseks välja lahendi  $y$  Taylor'i arendise (4.6):

$$y(x_{i+1}) = y_i + h y'_i + \frac{h^2}{2} y''_i + \frac{h^3}{6} y'''_i + \frac{h^4}{24} y''''_i + \dots \quad (4.11)$$

Näeme, et valides „õiged“  $\{\alpha_i\}$  ja  $\{\beta_i\}$  väärtused, saab sammul tekkiva vea  $E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})|$  teha kuitahes väikeseks (viimase eelduseks on, et vastavad  $y$  tuletised leiduksid).

Üldise ilmutatud kahesammulise meetodi jaoks võime võtta  $\beta_{-1} = 0$ . Et saada teist järku meetodit, peame vastavad kordajad võtma nii, et võrrandites (4.10) ja (4.11) kordajad ühtiksid kuni järguni  $h^2$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ -\alpha_1 + \beta_0 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 - 2\beta_1 = 1 \end{array} \right\}. \quad (4.12)$$

Viimasel kolmevõrrandilisel süsteemil on neli tundmatut ja süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Võime võtta vabaks muutujaks näiteks  $\alpha_0$ . Sellisel juhul

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 - \alpha_0 \\ \beta_0 = 2 - \frac{1}{2}\alpha_0 \\ \beta_1 = -\frac{1}{2}\alpha_0 \end{array} \right\}. \quad (4.13)$$

Teist järku ilmutatud kahesammulise meetodi sammul tekkiv viga avaldub valemiga

$$E_{i+1} = \left| \frac{1 + \alpha_1 - 3\beta_1}{6} h^3 y'''_i + O(h^4) \right| = \left| \frac{4 + \alpha_0}{12} h^3 y'''_i + O(h^4) \right|. \quad (4.14)$$

Võttes  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\beta_0 = \frac{3}{2}$  ja  $\beta_1 = -\frac{1}{2}$ , saame kahesammulise ilmutatud Adams'i-Bashforth'i meetodi (4.1), mille sammul tekkinud viga on kolm korda pidevalt diferentseeruva lahendi  $y \in C^3[a, b]$  korral hinnatav võrratusega

$$E_{i+1} = \left| \frac{5}{12} y_i''' h^3 + O(h^4) \right| \leq Mh^3, \quad M > 0. \quad (4.15)$$

Analoogiliselt saab tuletada kõrgemat järku meetodeid.

**Adams'i-Bashforth'i 3-sammuline ilmutatud meetod (3. järku),**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \left[ 23 f_i - 16 f_{i-1} + 5 f_{i-2} \right], \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (4.16)$$

**Adams'i-Bashforth'i 4-sammuline ilmutatud meetod (4. järku),**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left[ 55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3} \right], \quad i = 3, 4, 5, \dots \quad (4.17)$$

## 4.2 Mitmesammuliste meetodite stabiilsus

Seni oleme tähtsaks pidanud lähimeetodi järku (täpsusastet), kuid on veel üks omadus, mis osutub mitmesammuliste meetodite puhul äärmiselt oluliseks - stabiilsus ja mittestabiilsus (viimased iseloomustavad ebatäpsuse levimist arvutusprotsessis). Alustame näitega.

**Näide 4.1** Lahendame kõige lihtsama algtingimusega ülesande

$$y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad (4.18)$$

2. järku ilmutatud kahesammulise meetodiga

$$y_{i+1} = -y_i + 2y_{i-1} + h \left[ \frac{5}{2} f_i + \frac{1}{2} f_{i-1} \right], \quad i \geq 1.$$

Viimane saadakse seostest (4.10) ja (4.13) võttes  $\alpha_0 = -1$ . Rakendame meie meetodit algülesandele (mille täpne lahend  $y(x) = 0$ ),

$$y_{i+1} = -y_i + 2y_{i-1} + h \left[ \frac{5}{2} 0 + \frac{1}{2} 0 \right] = -y_i + 2y_{i-1}, \quad i \geq 1.$$

Lahendame diferentsvõrrandi (või ka rekurrentse võrrandi)

$$y_{i+1} + y_i - 2y_{i-1} = 0, \quad i \geq 1.$$

Selle võrrandi üheks lahendiks on  $y_i \equiv 0$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ), kuid see ei ole ainus lahend. Osutub, et siin võib võtta  $y_i = c \lambda^i$ , kus  $c$  ja  $\lambda$  on mingid konstandid.

Asendame,

$$c\lambda^{i+1} + c\lambda^i - 2c\lambda^{i-1} = 0, \quad i \geq 1.$$

Edasi,

$$c\lambda^{i-1}(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0, \quad i \geq 1,$$

millest saame kaks nullist erinevat lahendit  $\lambda_1 = 1$  ja  $\lambda_2 = -2$ . Suvalise konstandi  $c$  korral on jada  $y_i = c(-2)^i$  rekurrentse võrrandi  $y_{i+1} + y_i - 2y_{i-1} = 0$  lahend. Viimane tähendab aga seda, et pisemagi ümardamisvea või algtabeli vea korral ei saa me enam lahendit  $y_i \equiv 0$ , vaid  $y_i = c(-2)^i$ . Siit ka sammul tekkiv viga

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})| = |c(-2)^{i+1} - 0| = |c|2^{i+1},$$

mis kasvab sammude arvu  $i$  suurenedes tõkestamatult ja mis veel hullem, ka väga kiiresti. Siit saame ka minimaalse nõude, et lähismetoodile vastava karakteristliku võrrandi lahendid  $\lambda$  peaksid olema mooduli poolest tõkestatud ühega, s.t.  $|\lambda| \leq 1$ .

◇ ◇ ◇

#### Definitsioon 4.2

Võrrandile (4.3),  $i \geq q - 1$ ,

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + \dots + \alpha_{q-1} y_{i-q+1} + h \left[ \beta_{-1} f_{i+1} + \beta_0 f_i + \dots + \beta_{q-1} f_{i-q+1} \right], \quad (4.19)$$

vastavaks karakteristlikuks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$\lambda^q - \alpha_0 \lambda^{q-1} - \dots - \alpha_{q-2} \lambda - \alpha_{q-1} = 0. \quad (4.20)$$

#### Definitsioon 4.3

Mitmesammulist meetodit (4.3) nimetatakse stabiilseks, kui vastava karakteristliku võrrandi (4.20) ühegi lahendi  $\lambda \in \mathbb{C}$  moodul ei ületa ühte, s.t.

$$|\lambda| \leq 1, \quad (4.21)$$

ja kordsed lahendid  $\lambda_* \in \mathbb{C}$  on mooduli poolest rangelt väiksemad ühest, s.t.

$$|\lambda_*| < 1. \quad (4.22)$$

Kui need tingimused pole täidetud, siis meetodit (4.3) nimetatakse mittestabiilseks.

**Märkus 4.3**

Paneme tähele, et diferentsmeetodi stabiilsus või mittestabiilsus sõltub ainult kordajatest  $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$ . Esitatud stabiilsuse mõiste võttis kasutusele rootsi matemaatik Germund Dahlquist (1925-2005) 1956. aastal töös „Convergence and stability in the numerical integration of ordinary differential equations“. Seetõttu seda stabiilsust nimetatakse vahel ka stabiilsuseks Dahlquist'i mõttes.

Germund Dahlquist  
(1925-2005)



Foto: <https://www.kth.se>

**Definitsioon 4.4**

**Stabiilset** mitmesammulist meetodit (4.3) nimetatakse tugevalt stabiilseks, kui vastava karakteristliku võrrandi (4.20) lahend  $\lambda = 1$  on ainuke selline lahend, mille moodul  $|\lambda| = 1$ . Vastasel korral nimetatakse stabiilset meetodit (4.3) nõrgalt stabiilseks.

**Märkus 4.4**

Osutub, et mitmesammulise meetodi korral peab kehtima tingimus (vt. näiteks valemi (4.10) tuletamist)

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{q-1} = 1,$$

mis tähendab, et  $\lambda = 1$  on alati üks karakteristliku võrrandi

$$\lambda^q - \alpha_0 \lambda^{q-1} - \dots - \alpha_{q-2} \lambda - \alpha_{q-1} = 0$$

lahend.

**Näide 4.2** Adams'i diferentsvalemite korral  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$  ning karakteristlikul võrrandil (4.20) on kuju

$$\mu^q - \mu^{q-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^{q-1}(\mu - 1) = 0.$$

Sellel võrrandil on ühekordne lahend  $\mu_1 = 1$  ja  $(q - 1)$ -kordne lahend  $\mu_2 = 0$ . Järelikult kõik Adams'i valemid viivad tugevalt stabiilsete meetoditeni ja seepärast on just sellised meetodid praktikas enim levinud (ei ole tundlikud arvutusvigade suhtes).

◇ ◇ ◇

**Näide 4.3** Vaatleme skeeme, mille korral  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_0 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{q-1} = 0$ . Karakteristlikul võrrandil (4.20) on kuju

$$\mu^q - \mu^{q-2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu^{q-2}(\mu + 1)(\mu - 1) = 0.$$

Sellel võrrandil on ühekordseteks lahenditeks  $\mu_1 = 1$  ja  $\mu_2 = -1$  ning  $(q - 2)$ -kordseks lahendiks  $\mu_3 = 0$ . Seega vastavad mitmesammulised meetodid on stabiilsed. Kuna nii  $|\mu_1| = 1$  kui ka  $|\mu_2| = 1$ , siis antud meetodid on nõrgalt stabiilsed (olles mingil määral tundlikud arvutusvigade suhtes).

◇ ◇ ◇

**Näide 4.4** Vaatleme varem tuletatud üldist ilmutatud kaheastmelist meetodit

$$y_{i+1} = \alpha_0 y_i + (1 - \alpha_0) y_{i-1} + h \left[ \left( 2 - \frac{1}{2} \alpha_0 \right) f_i - \frac{1}{2} \alpha_0 f_{i-1} \right], \quad i \geq 1. \quad (4.23)$$

Vastava karakteristliku võrrandi

$$\mu^2 - \alpha_0 \mu - (1 - \alpha_0) = 0$$

lahenditeks on  $\mu_1 = 1$  ja  $\mu_2 = \alpha_0 - 1$ . Järelikult on diferentsmeetod stabiilne, kui

$$0 \leq \alpha_0 < 2.$$

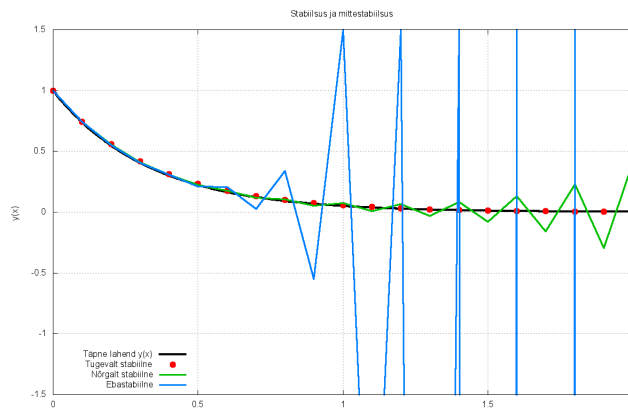
Meetod on tugevalt stabiilne, kui  $\alpha_0 \in (0, 2)$  ja nõrgalt stabiilne kui  $\alpha_0 = 0$ .

◇ ◇ ◇

**Näide 4.5** Vaatleme algtingimusega ülesannet

$$y' = -3y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 2],$$

mille täpseks lahendiks osutub  $y(x) = e^{-3x}$ . Rakendame sellele ülesandele kolme erinevat kaheastmelist meetodit ( $h = 0.1$ ) - tugevalt stabiilset (Adams'i-Bashforth'i meetod), nõrgalt stabiilset  $y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf_i$  ja ebastabiilset skeemi  $y_{i+1} = -y_i + 2y_{i-1} + h \left[ \frac{5}{2} f_i + \frac{1}{2} f_{i-1} \right]$ . Algtabeli jaoks  $y_1$  leiame trapetsmeetodiga.



Näeme, et tugevalt stabiilne meetod koondub ilusasti lahendiks  $y(x)$ , nõrgalt stabiilne meetod hakkab arvutusvigade kuhjudes käituma halvasti ja ebastabiilne meetod ei koonu üldse.

◇ ◇ ◇



**Definitsioon 4.5**

Me ütleme, et mitmesammuline meetod on kooskõlas, kui ta on vähemalt 1. järku meetod (s.t. sammul tekkiv viga  $E_{i+1} \leq Ch^2$ ).

**Definitsioon 4.6**

Me ütleme, et mitmesammuline meetod koondub, kui lähilahend  $y_i$  koondub täpseks lahendiks  $y(x_i)$  iga punkti  $x_i \in [a, b]$  korral protsessis  $h \rightarrow 0$ .

**Teoreem 4.1**

**Dahlquist'i teoreem** ([2]). Oletame, et algtabeli väärtused  $y_0, \dots, y_{q-1}$  on arvutatud täpselt. Siis mitmesammuline meetod (4.3) on koonduv parajasti siis, kui see on stabiilne ja kooskõlas.

Teoreem ütleb meile, et mitmesammuliste meetodite korral piisab meetodi koondumiseks uurida tema stabiilsust.

**Märkus 4.5**

Kahjuks aga osutuvad eriti kõrge täpsusastmega diferentsvalemid mittestabiilseteks. Praktikas pakuvad huvi madalama täpsusastmega stabiilsed valemid, milles mitte päris üheselt määratud kordajad leitakse näiteks tingimustest, et jääkliikme kordaja absoluutväärtus oleks võimalikult väike või ebatäpsuste edasikandumine oleks teatavas mõttes võimalikult soodne.

**4.3 Ilmutamata meetodid**

Kui üldises valemis (4.3) kordaja  $\beta_{-1} \neq 0$ , siis me saame ilmutamata meetodi. Sellisel juhul asub veel arvutamata suurus  $y_{i+1}$  võrrandi vasakul ja paremal pool,

$$\mathbf{y}_{i+1} = \dots + \beta_{-1} f(x_{i+1}, \mathbf{y}_{i+1}) + \dots$$

**Adams'i-Moulton'i** või ka **ilmutamata trapetsmeetod** (2. järku),

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f_{i+1} + f_i], \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.24)$$

Märgime, et kui me leiame siin liikmes  $f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$  oleva tundmatu  $y_{i+1}$  Euler'i meetodiga, siis me saame juba varem vaadeldud ühesammulise trapetsmeetodi.

**Adams'i-Moulton'i 2-sammuline meetod (3. järku),**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \left[ 5 f_{i+1} + 8 f_i - f_{i-1} \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.25)$$

Viimase saab tuletada seosest (4.10),

$$\begin{aligned} y_{i+1} = & \left[ \alpha_0 + \alpha_1 \right] y_i + \left[ -\alpha_1 + \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 \right] h y'_i + \left[ \alpha_1 + 2\beta_{-1} - 2\beta_1 \right] \frac{h^2}{2} y''_i \\ & + \left[ -\alpha_1 + 3\beta_{-1} + 3\beta_1 \right] \frac{h^3}{6} y'''_i + \left[ \alpha_1 + 4\beta_{-1} - 4\beta_1 \right] \frac{h^4}{24} y''''_i + \dots \end{aligned} \quad (4.26)$$

Võrreldes lahendi  $y$  Taylor'i reaga (4.11), võtame  $y_i$  ja tema tuletiste kordajad võrdseks ühega kuni järguni  $h^3$ . Sellisel juhul tuleb meil lahendada süsteem

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 = 1 \\ -\alpha_1 + \beta_{-1} + \beta_0 + \beta_1 = 1 \\ \alpha_1 + 2\beta_{-1} - 2\beta_1 = 1 \\ -\alpha_1 + 3\beta_{-1} + 3\beta_1 = 1 \end{array} \right\}. \quad (4.27)$$

Viimasel neljavõrrandilisel süsteemil on viis tundmatut ja süsteemil on lõpmata palju lahendeid. Võime võtta vabaks muutujaks näiteks  $\alpha_0$ . Sellisel juhul

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 - \alpha_0 \\ \beta_{-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\alpha_0 \\ \beta_0 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\alpha_0 \\ \beta_1 = \frac{1}{3} - \frac{5}{12}\alpha_0 \end{array} \right\}. \quad (4.28)$$

Võttes  $\alpha_0 = 1$ , saame Adams'i-Moulton'i 2-sammulise 3. järku meetodi (4.25). Viimasel juhul saame leida ka sammul tekkiva vea,

$$\begin{aligned} E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})| &= \left| \frac{1 - \alpha_1 - 4\beta_{-1} + 4\beta_1}{24} h^4 y''''_i + O(h^5) \right| \\ &= \left| -\frac{\alpha_0}{24} h^4 y''''_i + O(h^5) \right|. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Kui  $\alpha_0 = 1$ , siis sammul tekkiva vea peaosaks on  $-\frac{1}{24} h^4 y^{(4)}(x_i)$ .

**Adams'i-Moulton'i 3-sammuline meetod (4. järku),**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} \left[ 9 f_{i+1} + 19 f_i - 5 f_{i-1} + f_{i-2} \right], \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (4.30)$$

Adams-Moulton'i 4-sammuline meetod (5. järku),

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{720} \left[ 251 f_{i+1} + 646 f_i - 264 f_{i-1} + 106 f_{i-2} - 19 f_{i-3} \right],$$

$$i = 3, 4, 5, \dots \quad (4.31)$$

**Ülesanne.** Kas leidub nõrgalt stabiilseid 2-sammulisi 3. järku **ilmutamata** meetodeid? Kui leidub, siis näidata, et meetod on 3. järku ja nõrgalt stabiilne ja kui ei leidu, siis tõestada seda.

**Märkus 4.6**

Palju valemid saab tuletada, kui võrrandi  $y' = f(x, y)$  mõlemat poolt lõigul  $[x_i, x_{i+1}]$  integreerida,

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx. \quad (4.32)$$

Viimasel juhul saab integraali  $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$  jaoks kasutada vastavaid kvadratuurvalemeid või siis näiteks saab funktsiooni  $f(x, y)$  asendada tema interpolatsioonipolünoomiga (sel juhul saab integraali  $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$  lõpuni ära leida), vt. [1, 3].

#### 4.4 Prognoosi ja korrektsioonimeetod

**Märkus 4.7**

Praktikas kasutatakse tihti sama järku ilmutatud ja ilmutamata valemid paarikaupa üheskoos, kus esialgne algühend  $y_{i+1}^0$  leitakse ilmutatud valemi abil ning seejärel kasutatakse ilmutamata valemis asendust  $f(x_{i+1}, y_{i+1}) \approx f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)$ . Sellist diferentsiaalvõrrandi ligikaudse lahendamise meetodit nimetatakse kirjanduses **prognoosi ja korrektsioonimeetodiks** (*Predictor Corrector Method*).

**Märkus 4.8**

Saab näidata, et  $k$ -järku prognoosi-korrektsiooni meetodi sammul tekkiv viga on ligikaudu hinnatav sama järku ilmutatud ja ilmutamata valemiga leitud lähislahendi erinevuse  $|y_{i+1} - y_{i+1}^0|$  abil,

$$E_{i+1} = |y_{i+1} - y(x_{i+1})| \approx \frac{1}{10} |y_{i+1} - y_{i+1}^0|, \quad (4.33)$$

kusjuures ilmutamata valem tekitab umbes 10 korda väiksema vea, kui ilmutatud valem.

**Märkus 4.9**

Prognooosi-korrektsooni meetodi korral läheb sammul tekkiva vea  $E_{i+1}$  ligikaudseks leidmiseks vaja kaks funktsiooni  $f$  arvutust (üks ilmutamata ja teine ilmutatud valemiga). Kuigi võib ette tulla, et samal sammul tuleb  $y_{i+1}$  leidmisel kasutada lisaks iteratsiooniprotsessi, on tehete arv võrreldes Runge-Kutta meetoditega oluliseks eeliseks mitmesammuliste meetodite kasuks. Runge-Kutta-Fehlberg'i paarismetodi korral läks vea hindamine maksma 6 funktsiooni  $f$  väärtuse arvutamist, lõigu poolitamise võtte korral veel rohkem (11 arvutust Runge-Kutta 4. järku meetodi puhul).

**Märkus 4.10**

Kui mingil sammul selgub, et ligikaudne viga ei vasta meie soovidele, siis tuleb kasutada kas kõrgemat järku valemeid või muuta sammu pikkust. Mitmesammuliste meetodite juures on aga probleem, et sammu muutmine on palju tülikam, kui Runge-Kutta meetodite korral. Mitmesammulised meetodid kasutavad informatsiooni eelmiste osalõikude kohta, kus oli kasutusel konkreetne sammu pikkus  $h$ . Viimase muutmise mõjub ka nendele tulemustele. Runge-Kutta meetodid ei kasutanud mingit informatsiooni eelmiste osalõikude kohta ja sel korral oli väga lihtne sõltumatult muuta sammu pikkust. Võimalik lahendus on selline, et juba arvutatud väärtused  $y_0, \dots, y_i$  jäävad alles, leitakse uus algtabel sammu  $h_*$  jaoks ja edasine toimub nii nagu varem.

**Näide 4.6** Lahendame 4. järku meetoditega Cauchy ülesande

$$y' = xy + x^3, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Võrdleme tegelikku viga punktis  $x = 1$  ehk  $G_n = |y_n - y(1)|$ .

n	$h = \frac{1}{n}$	Ilmutatud Adams (4.17)	Pr.-kor. (4.17),(4.30)	Runge-Kutta
16	$6.25 \times 10^{-2}$	$1.9 \times 10^{-4}$ <b>13.54</b>	$1.3 \times 10^{-5}$ <b>12.88</b>	$2.2 \times 10^{-7}$ <b>16.16</b>
32	$3.13 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-5}$ <b>14.76</b>	$1.0 \times 10^{-6}$ <b>14.44</b>	$1.4 \times 10^{-8}$ <b>16.09</b>
64	$1.57 \times 10^{-2}$	$9.6 \times 10^{-7}$ <b>15.37</b>	$7.2 \times 10^{-8}$ <b>15.21</b>	$8.5 \times 10^{-10}$ <b>16.05</b>
128	$7.81 \times 10^{-3}$	$6.3 \times 10^{-8}$ <b>15.69</b>	$4.7 \times 10^{-9}$ <b>15.61</b>	$5.3 \times 10^{-11}$ <b>16.03</b>
256	$3.91 \times 10^{-3}$	$4.0 \times 10^{-9}$ <b>15.84</b>	$3.0 \times 10^{-10}$ <b>15.80</b>	$3.3 \times 10^{-12}$ <b>16.00</b>
512	$1.95 \times 10^{-3}$	$2.5 \times 10^{-10}$	$1.9 \times 10^{-11}$	$2.1 \times 10^{-13}$

Runge-Kutta 4. järku meetodi korral on viga punktis  $x = 1$  kõige väiksem, teisalt tuli siin teha ka rohkem arvutusi. Samuti näeme, et 4. järku prognooosi-korrektsooni meetodi (4.17),(4.30) korral on viga umbes kümme korda väiksem kui ilmutatud prognooosi meetodi (4.17) korral. Märgime, et vajalikud algtabelid on leitud Runge-Kutta 4. järku meetodiga.

◇ ◇ ◇

**Näide 4.7** Vaatleme diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 10 \left( y \int_0^1 \sin(y+s) ds - x \int_0^1 \sin(x+s) ds \right) \\ \frac{dy}{dt} = x \int_0^1 \sin(x+s) ds \left( 28 - z \int_0^1 \sin(z+s) ds \right) - y \int_0^1 \sin(y+s) ds \\ \frac{dz}{dt} = xy \int_0^1 \sin(x+s) ds \int_0^1 \sin(y+s) ds - \frac{8}{3} z \int_0^1 \sin(z+s) ds \end{array} \right\}.$$

Algtingimuste  $x(500) = 6$ ,  $y(500) = 6$  ja  $z(500) = 6$  korral saame lõigul  $t \in [500, 500 + 0.01 N]$  lahendades järgmised arvutusajad (programmiga Mathcad 15, ütleme et umbes keskmise lauaarvutiga):

N	Runge-Kutta 4. järku valem	Adams'i ilmutatud skeem
1024	1.1 sek	0.3 sek
2048	2.4 sek	0.7 sek
4096	4.6 sek	1.2 sek
8192	8.3 sek	2.1 sek
16384	16.7 sek	4.2 sek
32768	33.5 sek	8.5 sek

Adams'i skeemiks on 3. järku meetod  $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12}(23f_i - 16f_{i-1} + 5f_{i-2})$ , kuigi arvutusaegade mõttes ei ole suurt vahet, millist ilmutatud skeemi kasutada. Näeme, et Runge-Kutta meetod on tõepoolest umbes neli korda aeglasem, kuna igal sammul tehakse kolme  $f$  arvutuse asemel 12 arvutust (siin igal etapil tuleb arvutada kolme funktsiooni  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  võrrandeid).

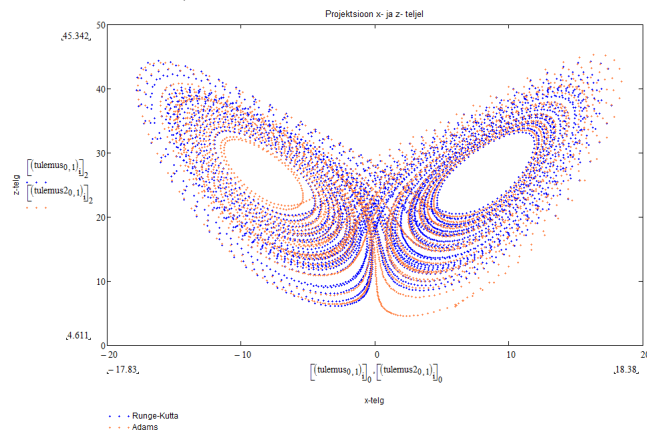
Eespool olev võrrandisüsteem on küll saadud veidi kunstlikult. Nimelt, asendatud on klassikalises Lorentz'i süsteemis

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 10(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(28 - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z \end{array} \right\} \quad (4.34)$$

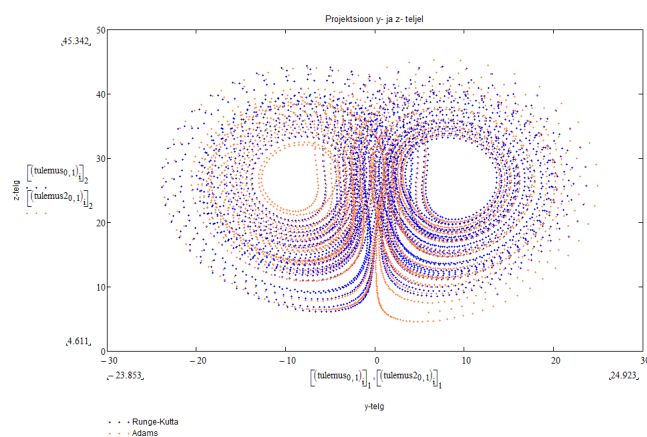
funktsioonid  $x$ ,  $y$  ja  $z$  vastavate korrutistega, mis sisaldavad integraali siinusest. Süsteemi (4.34) võrduste parematel pooltel asuvad arvutuslikult oluliselt lihtsamad funktsioonid. Järgmisest tabelist näeme, et sel juhul mitmesammulisel meetodil nii suurt eelist ei ole (kuna pole midagi keerulist arvutada):

N	Runge-Kutta 4. järku valem	Adams'i ilmutatud skeem
4096	0.02 sek	0.00 sek
8192	0.04 sek	0.02 sek
16384	0.07 sek	0.04 sek
32768	0.13 sek	0.08 sek
65536	0.27 sek	0.16 sek
131072	0.58 sek	0.33 sek

Lorentz'i süsteem (4.34) on üheks klassikaliseks kaose tekkimise näiteks (sellise süsteemi puhul muudab pisemgi arvutusviga lõpptulemust väga oluliselt). Lorentz'i süsteemi rakendatakse atmosfäärifüüsikas ilma enustamise mudelites. Näiteks Lorentz'i liblika graafik (ehk  $x$ - ja  $z$ -telje projektsioonid  $y$ -teljele) näeb välja selline:



Lorentz'i öökulli silmade graafik (ehk  $y$ - ja  $z$ -telje projektsioonid  $x$ -teljele) :



◇ ◇ ◇

## Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] T. Sauer. Numerical analysis. Pearson, 2012.
- [3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.