

5 Rajaülesanded. Tulistamise meetod

Sisukord

5 Rajaülesanded. Tulistamise meetod	56
5.1 Rajaülesande ja Cauchy ülesande erinevus	57
5.2 Rajaülesande seade	59
5.3 Lineaarse rajaülesande täpne lahendamine	61
5.4 Lineaarse rajaülesande taandamine algtingimustega ülesannetele	63
5.5 Tulistamise meetod	66
5.6 Tulistamise meetod võrrandisüsteemide jaoks	69
5.7 Broydeni II iteratsioonimeetod vektorfunktsioonide jaoks	71

Märksõnad

1. Rajaülesande seade II järku võrrandi jaoks lineaarsete rajatingimuste korral.
2. Lineaarse rajaülesande taandamine algtingimustega ülesannetele.
3. Tulistamise meetod.
4. Tulistamise meetod vektorväärtuste korral.

5.1 Rajaülesande ja Cauchy ülesande erinevus

Seni vaatasime ülesandeid, kus oli antud algtingimus $y(x_0) = y_0$ ja teades igas punktis (x, y) lahendi muutumise kiirust $y' = f(x, y)$ (või ka puutuja tõusnurka), saime algpunktist (x_0, y_0) alustades liikuda samm-sammult „vektorite“ kaupa edasi. Sealjuures ei olnud suurt probleemi, kui lähislahend lõigu $[a, b]$ paremas otspunktis b erines mõnevõrra täpse lahendi väärtusest.

Esimese peatüki kolm teoreemi andsid piisavad ja tarvilikud tingimused algtingimusega ülesande lahendi ja tema ühesuse kohta ning osutus, et algtingimusega ülesanded on lahenduvad ja sealjuures üheselt lahenduvad üsna avaratel eeldustel. Kui meil on teist järku võrrand koos algtingimustega:

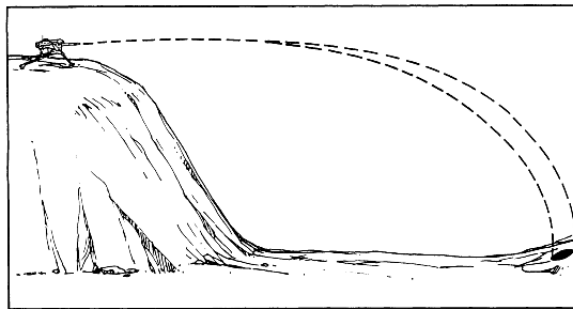
$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(a) = y_a, \\ y'(a) = y'_a, \end{cases} \quad (5.1)$$

siis me teame y ja y' väärtust algpunktis a . Teist järku võrrandi saab lihtsalt viia kahest esimest järku võrrandist koosnevaks süsteemiks ja kogu eelnev arutelu jääb üldjoontes kehtima.

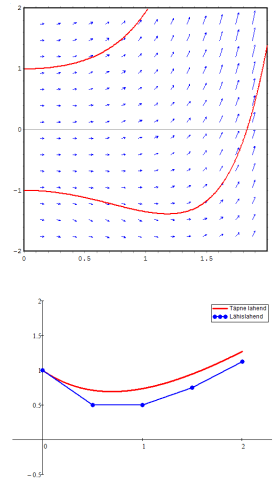
Rajaülesanded on aga põhimõtteliselt erineva iseloomuga. Näiteks võib teist järku võrrandit

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5.2)$$

kirjeldada järgmise analoogiaga. Olgu mäe otsas (punktis $x = a$) kahur, mis üritab tabada sihtmärki punktis $x = b$. Kahuri laskenurka võib muuta. Kuuli lennutrajektoori kirjeldab teatud teist järku võrrand $y'' = f(x, y, y')$, millel on lõpmata palju lahendeid ($y(x)$ näitab kuuli asukohta punktis x).



Algtingimustega ülesandes on antud kuuli algasend y_a punktis a (loeme siin, et see fikseerib ka kahuri asendi) ja kuuli väljalennu kiirus (algkiirus) y'_a . Sel juhul piisavalt heade omadustega funktsiooni f korral on ülesande lahend üheselt määratud, s.t. ka kuuli asend lõpp-punktis $x = b$ (selle järgi saame otsustada, kas kuul tabab või ei taba sihtmärki).



Rajaülesandes saab ette anda erinevaid tingimusi. Teist järku võrrandi jaoks on vaja vähemalt kahte lisatingimust. Näiteks võime ette anda kuuli algkiiruse y'_a ja soovitava kuuli lõppasukoha y_b ,

$$y'(a) = y'_a, \quad y(b) = y_b.$$

1. Kui sihtmärk $x = b$ asub kahuri laskeulatusest kaugemal, siis rajaülesandel lahend puudub (rajatingimused on ebakorrektselt valitud).
2. Kui sihtmärk asub täpselt kahuri maksimaalses laskeulatuses, siis antud rajatingimustega ülesandel on täpselt üks lahend (üks võimalik kuuli lennutrajektor).
3. Kui sihtmärk asub lähemal, kui kahuri maksimaalne laskeulatus, siis on antud rajaülesandel vähemalt kaks erinevat lahendit. Üks nendest on kõrge kaarega trajektor (lastud suurema kui 45 kraadise nurga alt ja viimase etapi läbib kuul vabalangemises) ja teine lahend on väiksema nurgaga nn. otse peale lastud trajektor. Ilmselt on nende lahendite korral kuuli lõppkiirus y'_b erinev.

Uute rajaülesannete saamiseks võime tingimusi seada valides näiteks alg- ja lõpp-punkti y_a, y_b või alg- ja lõppkiiruse y'_a, y'_b või siis algasendi y_a ja lõppkiiruse y'_b .

Näide 5.1 Laseme ilutulestikuraketi 30 meetri kõrguse hoone katusele otse ülesse. Leida raketi maksimaalne kõrgus, kui rakett jõuab maapinnale 4 sekundi pärast. Olgu t aeg ja $y(t)$ raketi kõrgus hetkel t . Antud ülesannet kirjeldab teist järku võrrand

$$y''(t) = -g.$$

Algtingimusega ülesande

$$y(0) = 30, \quad y'(0) = v_0$$

jaoks oleks vaja teada raketi algkiirust v_0 , mida me antud olukorras ei tea (ja ei ole ka võimalik vastavaid lähismeetodeid kasutada). Teisalt, moodustades rajatingimused

$$y(0) = 30, \quad y(4) = 0,$$

saame diferentsiaalvõrrandi üldlahendist (integreerides võrduse pooli kaks korda)

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

rajatingimuste abil leida

$$y_0 = y(0) = 30, \quad y(4) = 0 = -\frac{1}{2}g \cdot 16 + 4v_0 + 30.$$

◇ ◇ ◇

Kuidas rajaülesanded tekivad ja miks neid vaja on? Toome selle kohta väga lihtsa näite.

Siin $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ on raskuskiiendus ja võrrand on tuletatud Newton'i teisest seadusest $F = ma$.

Saame, et $v_0 \approx 12.12 \text{ m/s}$. Lahendist $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 12.12t + 30$ võib nüüd leida, et maksimaalne kõrgus $y(1.235) \approx 37.5$ meetrit.

5.2 Rajaülesande seade

Matemaatika teoreetilistes ja rakenduslikes probleemides esinevad üsna sageli hariliku diferentsiaalvõrrandi rajaülesanded, mille korral otsitakse diferentsiaalvõrrandit

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (5.3)$$

ja rajatingimusi

$$U_i y = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.4)$$

rahuldavat funktsiooni $y(x)$. Seejuures $U_i y$ on teatavad avaldised otsitava lahendi $y(x)$ ja selle tuletiste väärtustest, kusjuures rajatingimustes (5.4) peab neid väärtusi esinema vähemalt kahel erineval kohal (muidu oleks meil algtingimustega ülesanne). Siin γ_i on mingid teada olevad konstandid. Tavaliselt oletatakse, et rajatingimused sisaldavad kuni $(n - 1)$ -järku tuletiste väärtusi, sest kõrgemat järku tuletiste väärtused saab avaldada nende kaudu diferentsiaalvõrrandi (5.3) abil.

Järgnevalt on kasutatud õpikut [3].

Rakendustes kohtame enamasti lineaarseid rajatingimusi, mis on seotud argumendi kahe väärtusega, s.t. mille korral

$$U_i y = \sum_{j=0}^{n-1} [\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.5)$$

kus α_{ij} ja β_{ij} on konstandid (mõned neist võivad ka nullid olla).

Kõikjal järgnevas eeldame, et lineaarvormid $U_i y$, $i = 1, \dots, n$, on lineaarselt sõltumatud (vastasel korral oleks rajatingimuste süsteem (5.4) kas vastuoluline või selles sisalduks mõni üleaarune tingimus). Erijuhul, kui kõik kordajad $\alpha_{ij} = 0$ (või siis kõik kordajad $\beta_{ij} = 0$), kujutavad tingimused (5.4) algtingimusi.

Näide 5.2 Vaatleme statsionaarset temperatuurijaotust metallvardas. Paigutame x -telje piki varrast. Varda otsad asetsegu kohtadel $x = a$ ja $x = b$.



Siis saab näidata, et varda temperatuur $y(x)$ kohal x rahuldab teist järku diferentsiaalvõrrandit

$$(p(x)y'(x))' - r(x)y(x) = -r(x)T(x),$$

milles $p(x)$ iseloomustab materjali soojusjuhtivust ja $r(x)$ pinna soojuskiirgust kohal x , $T(x)$ on keskkonna temperatuur samal kohal.

Oletame, et varras on sedavõrd peenike, et temperatuuri erinevusi samas ristlõikes ei ole vaja arvestada.

Otsitava temperatuuri $y(x)$ leidmiseks diferentsiaalvõrrandist üksi on veel vähe. Meil on lisaks vaja teada mingit infot otspunktide kohta, mida kirjeldavadki rajatingimused. Näiteks võivad rajatingimused olla antud järgmisel moel:

1. tingimus

$$y(a) = \gamma,$$

näitab, et varda otspunktis $x = a$ hoitakse konstantset temperatuuri γ ;

2. tingimus

$$y'(a) = 0,$$

vastab soojuslikult isoleeritud otspunktile $x = a$ (s.t. ei toimu soojusvahetust, soojuse muutumise kiirus y' on null);

3. soojuse kiirgamisel otspunktis a saame lihtsamal juhul tingimuse

$$y'(a) - \delta y(a) = \gamma,$$

kus δ iseloomustab kiirgamise intensiivsust ja $-\gamma/\delta$ keskkonna temperatuuri.

Otspunktis b võib samuti esineda üks neist kolmest võimalusest, mis annab teise rajatingimuse. Näiteks võib olukord punktides a ja b olla erinev ja üks võimalik rajatingimuste komplekt on (isoleeritud punkt a , punktis b toimub soojusvahetus)

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) - \delta y(b) = \gamma.$$

Esitatud rajatingimused esinevad sageli teist järku diferentsiaalvõrrandi korral. Paneme tähele, et 2) tingimus on 3) erijuhuks, kui $\delta = \gamma = 0$. Kõik kolm (a või b suhtes) on aga erijuhtudeks järgmistest tingimustest:

$$\begin{aligned} \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) &= \gamma_1, \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) &= \gamma_2. \end{aligned}$$

◇ ◇ ◇

Näide 5.3 Elastisel alusel asuva horisontaalse tala painet kirjeldab diferentsiaalvõrrand

$$(k(x)y''(x))'' + r(x)y(x) = f(x),$$

kus $k(x)$ iseloomustab tala vastupanu paindele, $r(x)$ aluse elastsust ning $f(x)$ talale vertikaalsuunas mõjuvat koormust. Lahend $y(x)$ näitab tala kõrgust (horisontaalasendist) punktis x .

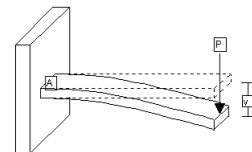


Figure 2: Cantilever beam deflection under load at fixed end

Rajatingimused näitavad tala otste kinnitusviisi. Sageli esinevad järgmised lihtsad rajatingimused:

1. tingimus

$$y(a) = y'(a) = 0,$$

näitab, et tala on kohal a horisontaalasendis jäigalt kinnitatud (tala liikumise kiirus y' on null);

- 2.

$$y(a) = y''(a) = 0,$$

näitab, et tala on kohal a horisontaalasendis šarniirselt kinnitatud (ehk liigendühenduses nagu näiteks kokkupandavad redelid), asukoht $y(a)$ on määratud, tala liikumise kiirus $y'(a)$ aga määramata, kiirendus $y''(a)$ on null;

- 3.

$$y''(a) = y'''(a) = 0,$$

näitab, et tala ots kohal a on vaba ($y(a)$ ei ole fikseeritud ja tala liikumise kiirus $y'(a)$ ei ole fikseeritud, samas on näiteks kiirendus $y''(a) = 0$). Tingimused oleksid nullist erinevad, kui talale mõjaks mingi väline sundiv jõud.

Analoogilised tingimused võivad esineda punktis b . Joonisel on kujutatud rajatingimusi

$$y(a) = y'(a) = y''(b) = y'''(b) = 0.$$

◇ ◇ ◇

5.3 Lineaarse rajaülesande täpne lahendamine

Lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (5.6)$$

rajaülesande saab lahendada järgmisel teel (vt. [1, 3]).

Leiame kõigepealt selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \quad (5.7)$$

milles $y_0(x)$ on võrrandi (5.6) üks erilahend ja $y_1(x), \dots, y_n(x)$ vastava homogeense võrrandi

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) = 0 \quad (5.8)$$

lineaarselt sõltumatud lahendid (nn. lahendite fundamentaalsüsteem) ning C_1, \dots, C_n on suvalised konstandid.

Näide 5.4 Vaatleme homogeenset konstantsete kordajatega lineaarset võrrandit (vt. [1], lk. 347-348)

$$y'' + y = 0.$$

Selle ülesande üldlahendit on võimalik vahetult leida vastava karakteristliku võrrandi abil. Nimelt, karakteristlikuks võrrandiks on

$$\mu^2 + 1 = 0,$$

mille lahenditeks on $\mu_1 = i$ ja $\mu_2 = -i$, kus $i = \sqrt{-1}$. Seega üheks erilahendiks on funktsioon $y_1(x) = \cos x$ ja teiseks erilahendiks on funktsioon $y_2(x) = \sin x$. Esialgse võrrandi üldlahend avaldub kujul

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

kus C_1 ja C_2 on suvalised konstandid.

◇ ◇ ◇

Olgu võrrandile (5.6) vastavad rajatingimused

$$U_i(y) = \gamma_i, \quad U_i = \sum_{j=0}^{n-1} [\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b)], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.9)$$

mittevasturääkivad ja lineaarselt sõltumatud (vt. [1]).

Definitsioon 5.1

Olgu y_1, \dots, y_n lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi (5.8) lahendite fundamentaalsüsteem. Tähistame

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Teoreem 5.1

[1]. Rajaülesanne (5.6), (5.9) on üheselt lahenduv parajasti siis, kui

$$\Delta \neq 0.$$

Teoreem 5.2

[1]. Homogeensel ülesandel (5.8) rajatingimustega $U_i(y) = 0$ on mittetriiviaalne lahend parajasti siis, kui $\Delta = 0$.

Näide 5.5 Vaatleme homogeenset konstantsete kordajatega lineaarset võrrandit

$$y'' + y = 0.$$

Selle ülesande üldlahendi

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

leidsime eelmises näites. Rajatingimuste

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

abil saame

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Teoreemi põhjal on rajaülesanne üheselt lahenduv. Tõepoolest, rajatingimuste abil võime lahendada võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \cos(0)C_1 + \sin(0)C_2 = 0 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)C_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)C_2 = 1 \end{cases},$$

millel leidub parajasti üks lahend $C_1 = 0$ ja $C_2 = 1$ ning seega ülesande täpne lahend on $y(x) = \sin x$. Samas, teiste rajatingimuste

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1$$

korral saame

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \cos(\pi) & \sin(\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Teoreemi põhjal rajaülesanne ei ole üheselt lahenduv. Võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} \cos(0)C_1 + \sin(0)C_2 = 0 \\ \cos(\pi)C_1 + \sin(\pi)C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ -C_1 = 1 \end{cases}$$

tõepoolest ei leidu lahendit.

◇ ◇ ◇

5.4 Lineaarse rajaülesande taandamine algtingimustega ülesannetele

Osutub, et kõik need ülesande (5.6) (eri)lahendid $y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x)$ võib leida algtingimustega ülesannete lahenditena, võttes ise vabalt näiteks $y_0(x)$ arvutamiseks homogeensed rajatingimused

$$y_0(a) = 0, \quad y_0^{(1)}(a) = 0, \quad \dots, \quad y_0^{(n-1)}(a) = 0, \quad (5.11)$$

ja $y_1(x), \dots, y_n(x)$ arvutamiseks ($i = 1, \dots, n$)

$$y_i^{(i-1)}(a) = 1; \quad y_i^{(j)}(a) = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad j \neq i-1. \quad (5.12)$$

Märkus 5.1

Viimast saab kirjeldada ka kui maatriksvõrdust

$$\begin{pmatrix} y_1(a) & y_1^{(1)}(a) & \cdots & y_1^{(n-1)}(a) \\ y_2(a) & y_2^{(1)}(a) & \cdots & y_2^{(n-1)}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n(a) & y_n^{(1)}(a) & \cdots & y_n^{(n-1)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Tähtis on, et kõik vabalt valitud algtingimused ei võrduks nulliga (vastasel korral saaksime null-lahendi).

Seejärel leiame üldlahendis

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) \quad (5.14)$$

sisalduvad konstandid C_1, \dots, C_n nii, et oleksid rahuldatud rajatingimused (5.9). Lineaarsete rajatingimuste korral saame selliselt toimides lineaarse algebralise võrrandisüsteemi C_1, \dots, C_n suhtes. Nimetatud lineaarsel süsteemil võib olla üks või palju lahendeid või tal võivad lahendid puududa, sama olukord on siis ka rajaülesande lahenduvusega.

Näide 5.6 Vaatleme võrrandit

$$y'' = y + 2e^x$$

rajatingimustega

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e.$$

Selle ülesande võiksime lahendada järgmise kolme Cauchy ülesande abil:

$$I: \begin{cases} y_0'' = y_0 + 2e^x, \\ y_0(0) = 0, \\ y_0'(0) = 0. \end{cases} \quad II: \begin{cases} y_1'' = y_1 \\ y_1(0) = 1, \\ y_1'(0) = 0. \end{cases} \quad , \quad III: \begin{cases} y_2'' = y_2 \\ y_2(0) = 0, \\ y_2'(0) = 1. \end{cases}$$

Me ei pea võtma just selliseid algtingimusi, aga need on kõige lihtsamad (ja süstemaatilised).

Ülesande lahendi

$$y(x) = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

määramiseks piisab leida konstandid C_1 ja C_2 . Viimased saab omakorda leida võrrandite süsteemist, mis tekib rajatingimustest:

$$\begin{cases} 0 = y_0(0) + C_1 y_1(0) + C_2 y_2(0), \\ e = y_0(1) + C_1 y_1(1) + C_2 y_2(1). \end{cases}$$

Arvutis ligikaudu lahendamisel peaksime C_1 ja C_2 leidmiseks lahendite vektoritest võtma esimese ja viimase elemendi.

◇ ◇ ◇

Näide 5.7 Vaatleme eelnevalt toodud metallvarda ülesannet

$$(p(x)y')' - r(x)y = -r(x)T(x).$$

Selle võrrandi saab ümber kirjutada kujule

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{r(x)}{p(x)}y = -\frac{r(x)T(x)}{p(x)}.$$

Saime lineaarse kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi, mille üldlahend avaldub kujul

$$y(x) = y_0(x) + C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Erilahendite y_0, y_1, y_2 leidmisel ei ole esialgu rajatingimustel endil tähtsust. Erilahendite leidmiseks moodustame kolm algtingimustega ülesannet. Esiteks leiame esialgse ülesande erilahendi y_0 Cauchy ülesandest

$$I: \begin{cases} y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{r(x)}{p(x)}y_0 = -\frac{r(x)T(x)}{p(x)}, \\ y_0(a) = 0, \quad y_0'(a) = 0. \end{cases}$$

Seejärel leiame homogeense võrrandi erilahendid y_1 ja y_2 :

$$II: \begin{cases} y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{r(x)}{p(x)}y_1 = 0, \\ y_1(a) = 1, \quad y_1'(a) = 0, \end{cases} \quad III: \begin{cases} y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{r(x)}{p(x)}y_2 = 0, \\ y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1. \end{cases}$$

Olgu näiteks kolme funktsiooni $y_0(x), y_1(x), y_2(x)$ lähilahendid ja nende tuletiste väärtused salvestatud vastavalt vektoritesse

$$Y_0 = (y_0^0, y_1^0, \dots, y_N^0), \quad Y_1 = (y_0^1, y_1^1, \dots, y_N^1), \quad Y_2 = (y_0^2, y_1^2, \dots, y_N^2),$$

$$Y_0' = (y_0'^0, y_1'^0, \dots, y_N'^0), \quad Y_1' = (y_0'^1, y_1'^1, \dots, y_N'^1), \quad Y_2' = (y_0'^2, y_1'^2, \dots, y_N'^2).$$

Vastava rajaülesande lahendamiseks tuleb nüüd leida konstandid C_1 ja C_2 antud rajatingimustest. Olgu meil antud näiteks rajatingimused

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) - \delta y(b) = \gamma.$$

Seega peavad kehtima võrrandid

$$y'(a) \equiv y_0'(a) + C_1y_1'(a) + C_2y_2'(a) = 0,$$

$$y'(b) - \delta y(b) \equiv [y_0'(b) - \delta y_0(b)] + C_1[y_1'(b) - \delta y_1(b)] + C_2[y_2'(b) - \delta y_2(b)] = \gamma.$$

Asendades vastavad lähilahendite ja nende tuletiste väärtused (punktile a vastavad väärtused punktis x_0 ja punktile b vastavad väärtused punktis x_N), saame lineaarse võrrandisüsteemi konstantide C_1 ja C_2 suhtes:

$$\begin{cases} y_0^1 C_1 + y_0^2 C_2 = -y_0^0 \\ (y_N^1 - \delta y_N^1) C_1 + (y_N^2 - \delta y_N^2) C_2 = \gamma - y_N^0 - \delta y_N^0 \end{cases}.$$

◇ ◇ ◇

Toodud kolm algtingimustega ülesannet saab sõltumatult arvutada mistahes sobiva Cauchy ülesande jaoks mõeldud lähismetodiga, näiteks Runge-Kutta või mitmesammuliste meetoditega.

Kui me oleme lahendanud antud süsteemi (eeldusel, et see on üldse lahenduv) ja leidnud konstandid C_1 ja C_2 , siis igas sõlmes x_0, \dots, x_N on esialgse võrrandi lahend leitav seostega

$$y(x_i) \approx y_i^0 + C_1y_i^1 + C_2y_i^2, \\ i = 0, \dots, N.$$

Märkus 5.2

Selline algtingimustega ülesannete abil lahendamise meetod on küll lihtne, kuid sellel on ka kaks suurt probleemi: ta võib osutuda väga arvutusmahukaks ja ligikaudse lahendi ebatäpsused kanduvad võimendatult üle konstantide C_1, \dots, C_n leidmisele (tekkiv võrrandite süsteem võib olla selles suhtes tundlik).

5.5 Tulistamismeetod

Tulistamismeetod esineb inglise keelses kirjanduses väljendina *Shooting Method*. Mittelineaarse diferentiaalvõrrandi üldlahend ei avaldu enam erilahendite lineaarkombinatsioonina. Seetõttu ei ole eelnevalt vaadeldud meetodid otseselt üle kantavad mittelineaarse rajaülesande juhule. Siiski leitakse praktikas ka siin lähilahendid teatava hulga algtingimustega ülesannete lahendamise teel. Viimase võib lühidalt kokku võtta järgmise skeemiga

- Eesmärk on leida selline algtingimustega ülesanne, mille korral selle täpne lahend ühtiks meie vaadeldava rajaülesande täpse lahendiga.
- Toodud eesmärgi saavutamiseks lahendatakse rida erinevaid algtingimustega ülesandeid, mille lahendid siis loodetavasti koonduvad rajaülesande täpseks lahendiks.

Vaatleme tulistamismeetodit teist järku diferentiaalvõrrandi rajaülesande näitel. Olgu meil antud rajaülesanne

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) = f(x, y, y') \\ y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{array} \right\}. \quad (5.15)$$

Meil on antud üks tingimus punktis $x = a$ ja teine tingimus punktis $x = b$. Valime algtingimuste jaoks näiteks punkti $x = a$. Antud ülesande lahendamiseks moodustame algtingimustega ülesande

$$\left\{ \begin{array}{l} y''(x) = f(x, y, y') \\ y(a) = y_a \\ y'(a) = s_a \end{array} \right\}, \quad (5.16)$$

kus lahendi tuletise väärtus algpunktis a on meile tundmatu suurus, mille võime vabalt ette anda arvu s_a näol, s.t. me teeme oletuse, et puutuja sirge tõus punktis a on esitatav seosega $y'(a) = s_a$. Selliselt saame lähilahendi \tilde{y} (ilmselt küll üsna erineva sellest lahendist, mida me otsime), mille abil arvutame väärtuste erinevuse lõigu teises otspunktis:

$$F(s_a) := \tilde{y}(b) - y_b. \quad (5.17)$$

- Kui kehtib $F(s) = 0$, siis on õige lahend y leitud. Praktikas piisab tingimusest $|F(s)| \leq \varepsilon$, kus $\varepsilon > 0$ on soovitud arvutustäpsus.

Teisiti, $F(s)$ on funktsioon, mis leiab lähilahendi $\tilde{y}(b)$ ja soovitud väärtuse y_b vahe, kusjuures \tilde{y} on leitud algtingimustest $y(a) = y_a$ ja $y'(a) = s$.

- Kui $F(s) \neq 0$ (või $|F(s)| > \varepsilon$), siis tuleb ülesandes (5.16) valida $s = s_a$ asemel mingi uus väärtus $s = s_*$ ja lahendada kogu ülesanne (5.16) uuesti. Arvutusi tuleb jätkata, kuni soovitud täpsus on saavutatud.

Me saame soovitud iteratsiooni läbi viia näiteks löikajate (teise nimega: kõõlude) meetodiga. Koos sellega näeks tulistamise meetodi skeem välja järgmine.

1. Valime $y'(a) = s_0$ ja lahendame ülesande

$$I : \left\{ \begin{array}{l} y_0''(x) = f(x, y_0, y_0') \\ y_0(a) = y_a \\ y_0'(a) = s_0 \end{array} \right\}; \quad (5.18)$$

2. arvutame

$$F(s_0) = y_0(b) - y_b.$$

Kui $F(s_0)$ on nullist liialt erinev, siis jätkame;

3. valime mingi teise väärtuse $y'(a) = s_1$ ja lahendame ülesande

$$II : \left\{ \begin{array}{l} y_1''(x) = f(x, y_1, y_1') \\ y_1(a) = y_a \\ y_1'(a) = s_1 \end{array} \right\}; \quad (5.19)$$

4. arvutame

$$F(s_1) = y_1(b) - y_b.$$

Kui $F(s_1)$ on nullist liialt erinev, siis jätkame;

5. arvutame uue lähendi s_2 meie esialgse rajaülesande puutujatõusule punktis a löikajate meetodi valemiga:

$$s_2 = s_1 - (y_1(b) - y_b) \frac{s_1 - s_0}{y_1(b) - y_0(b)}; \quad (5.20)$$

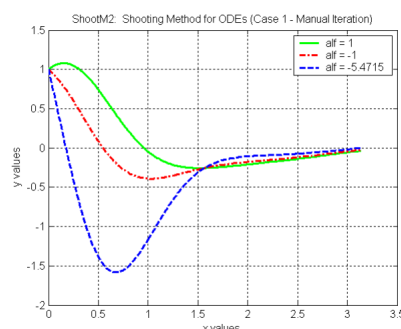
6. Lahendame ülesande

$$III : \left\{ \begin{array}{l} y_2''(x) = f(x, y_2, y_2') \\ y_2(a) = y_a \\ y_2'(a) = s_2 \end{array} \right\}; \quad (5.21)$$

7. arvutame

$$F(s_2) = y_2(b) - y_b.$$

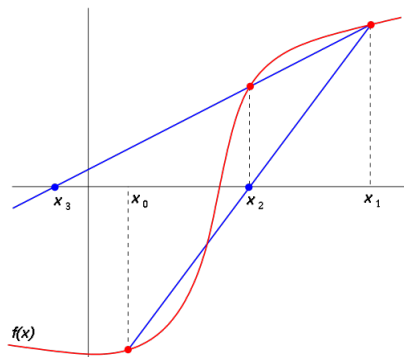
Kui $F(s_2)$ on nullist liialt erinev, siis jätkame nagu punktis 5 jne.



NB! Lähislahendite väike erinevus punktis b ei tähenda, et erinevus vahepealsetes punktides oleks samuti väike. Halval juhul võib erinevus olla suur. Seega tuleb erijuhul arvutustes nõuda suhteliselt suurt täpsust.

Üldjuhul saame funktsiooni $f(x)$ nullkoha leidmiseks lõikajate meetodiga välja kirjutada järgmiselt

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



Analoogiliselt meie funktsiooni $F(s_i) = y_i(b) - y_b$ jaoks,

$$s_{i+1} = s_i - (y_i(b) - y_b) \frac{s_i - s_{i-1}}{y_i(b) - y_{i-1}(b)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.22)$$

Arvutusprotsessi kordame seni, kuni $y_i(b) - y_b$ on küllalt väike. Selle saavutamise, kui protsess koondub. Teoreetiliselt jõuame rajaülesande täpse lahendini alles lõpmata arvu sammude järel, seega praktikas peame protsessi lõpetama mingi vastuvõetava veataseme $y_n(b) - y_b$, $n \in \mathbb{N}$, korral. Esialgse rajaülesande lähilahendiks saab sel juhul viimati leitud lahend $y_n(x)$.

Märkus 5.3

Lõikajate meetodi koondumine (vt [4]). Kuulugu otsitav nullkoht x_* ja lähendid x_0, \dots, x_n lõiku $[a, b]$ ning olgu $f \in C^2[a, b]$ ja $f'(x_*) \neq 0$ (lahend on ühekordne). Siis kehtib hinnang

$$|x_* - x_{n+1}| \leq C |x_* - x_n|^p, \quad p = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1.62,$$

kus C on mingi positiivne konstant.

Newtoni meetod on ruutkoonduvusega, s.t. $p = 2$. Seega on kõõlude meetod aeglasem, kuid siiski küllalt kiire.

Näide 5.8 Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$y''(x) - y(x) = 2 \sin x - 1 \quad (5.23)$$

rajatingimustega

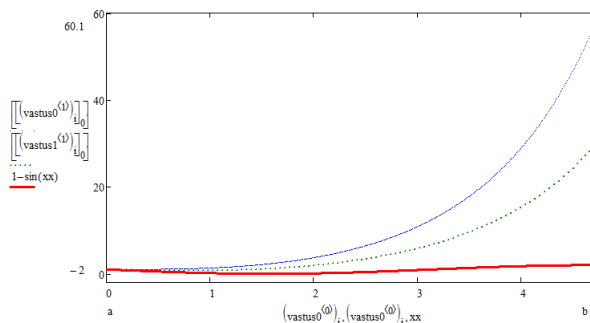
$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2. \quad (5.24)$$

Moodustame kaks algtingimustega ülesannet, andes $y'(0)$ väärtusteks 0 ja -0.5:

$$I : \left\{ \begin{array}{l} y_0''(x) - y_0(x) = 2 \sin x - 1 \\ y_0(0) = 1 \\ y_0'(0) = 0 \end{array} \right\}, \quad (5.25)$$

$$II : \left\{ \begin{array}{l} y_1''(x) - y_1(x) = 2 \sin x - 1 \\ y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = -0.5 \end{array} \right\}. \quad (5.26)$$

Lahendades need võrrandid Runge-Kutta 4-järku meetodiga, tuleb punktis $b = \frac{3}{2}\pi$ vastusteks $y_0(b) \approx 57.654$ ja $y_1(b) \approx 29.827$. Kanname lahendid ka joonisele koos täpse lahendiga $y(x) = 1 - \sin x$:



Nagu näha, siis meie "suvaliselt" valitud algtingimused annavadki mingis mõttes "suvalised" lahendid. Erinevad otsitust ikka väga palju.

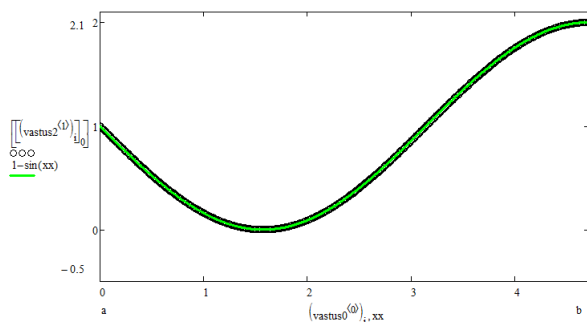
Leiame lõikajate meetodiga uue, $y_2'(0)$ väärtuse:

$$y_2'(0) = -0.5 - (29.827 - 2) \frac{-0.5 - 0}{29.827 - 57.654} \approx -1.$$

Lahendame kolmanda algtingimustega ülesande:

$$III : \left\{ \begin{array}{l} y_2''(x) - y_2(x) = 2 \sin x - 1 \\ y_2(0) = 1 \\ y_2'(0) = -1 \end{array} \right\}. \quad (5.27)$$

Saame, et $y_2(b) = 1.9999999965299 \approx 2$ ja osutub, et lõikajate meetod töötas antud juhul väga kiiresti ja meie otsitud lähilahend ongi leitud:



◇ ◇ ◇

5.6 Tulistamismeetod võrrandisüsteemide jaoks

Tulistamismeetodit saab kasutada ka võrrandisüsteemide jaoks.

Näide 5.9 Vaatleme süsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = \frac{4-2z(t)}{t^3} \\ z'(t) = -e^{y(t)} \\ y(1) = 0 \\ z(2) = 0 \end{array} \right\}, \quad t \in [1, 2].$$

Meil on antud väärtused $y(1)$ ja $z(2)$. Algtingimustega ülesande jaoks valime punkti $t = 1$ ja anname z väärtuseks punktis $t = 1$ oletatava suuruse $z(1) = s_1$. Seejärel võime lahendada algtingimustega ülesande

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = \frac{4-2z(t)}{t^3} \\ z'(t) = -e^{y(t)} \\ y(1) = 0 \\ z(1) = s_1 \end{array} \right\}, \quad t \in [1, 2].$$

Lisaks anname ette mingi teise väärtuse $z(1) = s_2$ ja moodustame vastava ülesande (lahenditeks on $y_1(t), z_1(t)$ ja $y_2(t), z_2(t)$). Lõikajate meetodi koondumist tuleb sel juhul kontrollida tingimuse

$$F(s) = z_n(2) - z(2) = z_n(2) \Leftrightarrow z_n(2) = 0$$

abil.

◇ ◇ ◇

Näide 5.10 Tulistamise meetodis ei saa sugugi ainult ühte väärtust „ära arvata“, vaid neid väärtusi võib olla rohkem. Tähistame veeurvektori

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t), y_5(t), y_6(t), y_7(t))^T.$$

Olgu antud mingi vektorfunktsioon $f(t, Y(t))$. Vaatleme näiteks sellist 7-võrrandilist võrrandisüsteemi

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = f(t, Y(t)) \\ y_1(0) = \frac{\pi}{2} \quad y_1(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ \quad \quad \quad y_2(\frac{\pi}{2}) = 0 \\ y_3(0) = 0 \\ y_4(0) = 0 \\ y_6(0) = 0 \quad y_6(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{array} \right\}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Meil on antud neli tingimust punktis $t = 0$ ja kolm tingimust punktis $t = \frac{\pi}{2}$. Loomulik on valida algpunkt $t = 0$ ja nüüd võime koostada algtingimustega ülesanded

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = f(t, Y(t)) \\ y_1(0) = \frac{\pi}{2} \\ y_2(0) = a_2 \\ y_3(0) = 0 \\ y_4(0) = 0 \\ y_5(0) = b_5 \\ y_6(0) = 0 \\ y_7(0) = c_7 \end{array} \right\}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

kus väärtused a_2, b_5 ja c_7 on vabalt valitavad.

◇ ◇ ◇

Tulistamise meetodi jaoks piisab iga kord valida mingid teised väärtused ja jätkata arvutusi kuni lähislahend $\tilde{Y}(t)$ rahuldab piisava täpsusega rajatingimusi ka parempoolses otspunktis $t = \frac{\pi}{2}$. Küll aga on probleemiks see, et väärtuste a_2, b_5 ja c_7 täpsustamiseks ei tööta enam lõikajate meetod (viimane on mõeldud ühe muutuja funktsioonide jaoks). Iteratsiooniks võib kasutada näiteks Broydeni II meetodit. Jätkame oma näitega pärast nimetatud meetodi tutvustamist.

5.7 Broydeni II iteratsioonimeetod vektorfunktsioonide jaoks

Toome ära ühe võimaliku ligikaudse meetodi mitmemõõtmeliste funktsioonide nullkohtade leidmiseks (vt. [2]). Olgu antud n -mõõtmeline veeruvektor x_0 ja maatriks $B_0 = I$ ($n \times n$ -mõõtmeline ühikmaatriks). Lisaks olgu antud vektorfunktsioon $F(x)$.

Sel juhul saab vektorfunktsiooni $F(x)$ nullkohti leida järgmise iteratsiooniga:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{i+1} = x_i - B_i F(x_i), \\ \delta_{i+1} = x_{i+1} - x_i, \\ \Delta_{i+1} = F(x_{i+1}) - F(x_i), \\ B_{i+1} = B_i + \frac{(\delta_{i+1} - B_i \Delta_{i+1}) \delta_{i+1}^T B_i}{\delta_{i+1}^T B_i \Delta_{i+1}} \end{array} \right\}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.28)$$

Broydeni meetod leiab tegelikult Jacobi maatriksi J pöördmaatriksi J^{-1} lähendit B . Nimelt, ühemõõtmelisel juhul on meil Newtoni meetod:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}.$$

Vektorfunktsioonide korral on Newtoni meetod kujul

$$x_{i+1} = x_i - J^{-1}(x_i) \cdot F(x_i).$$

Märkame, et Broyden kasutab sama skeemi, aga igal iteratsioonil üritab maatriksit B ümber arvutada ja suunata J pöördmaatriksi poole.

Lisame siia juurde SciLab'is ja Python'is tehtud protseduurid.

```
function x = Broyden2( x0 , F , N )
    B = eye( x0*x0' ) // x0 on veeruvektor , B on ühikmaatriks
    Fvana = F( x0 ) // võtame uue muutuja , kuna F arvutused
                    // võivad sisaldada algtingimustega
                    // ülesannete lahendamist
    for i = 1 : N // N on iteratsioonide arv
        x = x0 - B*Fvana // Põhiiteratsioon
        Fuus = F( x ) // Uus F arvutamine
        delta = x - x0 // Muudame mõlemat deltat
        DELTA = Fuus - Fvana
                    // Järgneb B uus arvutamine
        B = B + ( ( delta - B*DELTA )*delta' * B ) / ...
```

Broydeni II meetodiks nimetatakse ka halvaks Broydeni meetodiks, samas I meetodit aga heaks. Nimelt, I meetod on funktsiooni F jaoks, millele saab arvutada tuletise väärtusi ja seega Jacobi maatriksit. II meetod aga töötab ka selliste funktsioonide jaoks, kus tuletise mõistet kui sellist pole üldse olemas. Loomulikult on II meetodi hinnaks tema aeglasem koondumine (ja ilmselt ebastabiilsem koondumine).

Kuna x ja $F(x)$ on veeru vektorid, siis avaldis

$$\delta^T B \Delta$$

annab kokku 1×1 maatriksi, sisuliselt ainult ühe arvu.


```

        ( delta '*B*DELTA )
    x0 = x          // standardne omistamine
    Fvana = Fuus   // analoogiline omistamine F jaoks
end              // väljundiks on viimane x väärtus
endfunction

```

Broyden Pythonis (Pythoni omapära tõttu ei pea siin jälgima veeru ja reavektoreid):

```

def Broyden2( x0 , f , N ):
    # x0 on alglähendi vektor

    B = np.eye(len(x0)) # B on alguses ühikmaatriks
    Fvana = f( x0 )    # võtame uue muutuja, kuna F arvutused
                        # võivad sisaldada algtingimustega
                        # ülesannete lahendamist

    for i in np.arange(N): # N on iteratsioonide arv, 0..N-1
        x = x0 - np.dot( B , Fvana ) # Põhiiteratsioon

        if np.max(abs(x-x0)) < 10**(-8):
            print ("Väljume_varem, _iteratsioon:", i)
            break # Teeme selleks, et ei tekiks nulliga jagamisi,
                  # kui kaks järjestikust lähendit on
                  # juba liiga võrdsed

        Fuus = f( x ) # Uus F arvutamine
        delta = x - x0 # Muudame mõlemat deltat
        DELTA2 = Fuus - Fvana
                    # Järgneb B uus arvutamine
                    # abi1 ja abi2 võtame selleks, et B arvutamist
                    # lihtsamalt kirja panna
        abi1 = delta - np.dot( B , DELTA2 )
        abi2 = np.dot( delta , B )

        B = B + np.outer( abi1 , abi2 )/np.dot( abi2 , DELTA2 )
        # outer käsk korrutab vektoreid maatriksite korrutamise reegli järgi ...
        # see erinevuse tegemine on Pythonis veidi veider asi

    x0 = x          # standardne omistamine
    Fvana = Fuus   # analoogiline omistamine F jaoks
                  # väljundiks on viimane x väärtus

    return x

```

Tõsi, antud iteratsioon ei garanteeri meile veel kindlat koondumist. Nagu Newtoni meetod, nii ka Broydeni II meetod sõltub tugevalt algühendi x_0 täpsusest.

Jätkame näites toodud ülesande lahendamist.

Näide 5.11 Moodustame tulistamismeetodis kasutatava funktsiooni F (funktsioon, mis kontrollib lähislahendi täpsust teises rajapunktis) järgmise skeemi alusel (pooleldi SciLab'i notatsioonis):

- function yy = F(y0) // Funktsiooni algus, sisendiks on algvektor oletatavatest väärtustest a_2, b_5, c_7 ,

$$y0 = [a_2 , b_5 , c_7];$$

- loome sõlmed lõigul $[a, b]$;
- loome algtingimuste vektori (nn täispika vektori):

$$yy0 = [\pi/2 , y0(1) , 0 , 0 , y0(2) , 0 , y0(3)];$$

- lahendame algtingimustega ülesande antud sõlmedel (näiteks Runge-Kutta meetodiga või siis näiteks „ode“) käsuga;
- algtingimustega ülesande lahendamisel saame vastuseks mingi lahendi yy , kus I reas on funktsiooni $y_1(t)$ väärtused sõlmedes, II reas on funktsiooni $y_2(t)$ väärtused sõlmedes jne;
- funktsioon F väljastab lõppvastusena kolmeliikmelise vektorvektori

$$yy = [y(0, -1) , y(2, -1) , y(5, -1)] - [0 , 0 , 0]$$

Siin $y(0, -1)$ tähistab lahendi yy maatriksis I rea viimast elementi, $y(2, -1)$ III ja $y(5, -1)$ VI rida viimast elementi. Vektor $[0, 0, 0]$ tähistab rajatingimusi teises otspunktis $t = \pi/2$ funktsioonide $y_1(t), y_2(t)$ ja $y_6(t)$ jaoks;

- endfunction // Funktsiooni lõpp.

Sellisel defineeritud funktsiooni F korral saame kasutada Broydeni II meetodit (5.28), kus

$$x_0 = [a_2, b_5, c_7]$$

ja pärast näiteks 10 iteratsiooni saame vastuseks parandatud väärtused

$$x_{10} = \text{Broyden2}(x_0, F, 10) = [\tilde{a}_2, \tilde{b}_5, \tilde{c}_7].$$

Toodud suuruste abil võime viimast korda lahendada oma algtingimustega ülesande

◇ ◇ ◇

Märgime, et kogu lahendus on küllaltki resursimahukas, kuna Broydeni II iteratsiooniskeemis arvutatakse uuesti funktsiooni F väärtusi (funktsiooni F sees aga lahendati 7-mõõtmelist süsteemi algtingimustega ülesande näol).

$$\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = f(t, Y(t)) \\ y_1(0) = \frac{\pi}{2} \\ y_2(0) = \tilde{a}_2 \\ y_3(0) = 0 \\ y_4(0) = 0 \\ y_5(0) = \tilde{b}_5 \\ y_6(0) = 0 \\ y_7(0) = \tilde{c}_7 \end{array} \right\}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Märkus 5.4

Andes ette alglähendi x_0 ja saades Broydeni II meetodiga lähendi x_{10} , on teinekord kasulik teha kogu iteratsioon uuesti, võttes $x_0 = x_{10}$.

Märkus 5.5

Kuna nii kõõlude kui Broydeni meetodis toimub jagamine F väärtuste vahega, siis peab F arvutamine olema tehtud piisava täpsusega, vastasel korral tekib probleeme liiga väikeste arvude jagamisega.

Viited

- [1] A. Pedas, G. Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tartu Ülikooli Kirjastus 2011.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.
- [4] E. Tamme, L. Vöhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1986.