

6 Diferentsmeetod rajaülesande lahendamiseks

Sisukord

6 Diferentsmeetod rajaülesande lahendamiseks	74
6.1 Diferentsmeetodite idee	75
6.2 Näiteid lineaarsete võrrandite kohta	76
6.3 Mittelineaarsed võrrandid	79
6.4 Newtoni meetod mitmemõõtmelisel juhul	80
6.5 Ligikaudne sammul tekkiv viga	81
6.6 Kõrgema täpsusastmega diferentsmeetodid	82
6.7 Mitmepunktimeetod	83
6.8 Kolme peadiagonaaliga võrrandisüsteemi lahendamine	85

Rajaülesannete lahendamiseks on praktikas väga levinud diferentsmeetodid (*Finite Difference Methods*), mille põhiideeks on vahetada välja (diferentsvalemite abil) algvõrrandis ja rajatingimustes esinevad lahendi tuletised vastavate lähisväärtustega ja lahendada tekkiv võrrandite süsteem (vt. nt. [1, 2], eelkõige kasutame õpikut [3]).

6.1 Diferentsmeetodite idee

Olgu meil antud üldine mittelineaarne diferentsiaalvõrrand

$$f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (6.1)$$

rajatingimustega

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{ij} y^{(j)}(a) + \beta_{ij} y^{(j)}(b)) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2)$$

Et me saaks kasutada võrdsete vahemikega koostatud diferentsvalemeid, peame lõigul $[a, b]$ moodustama ühtlase võrgu

$$x_i = a + i h, \quad i = 0, \dots, N, \quad h = \frac{b - a}{N}.$$

Sel juhul otsime võrrandi (6.1) lahendi y väärtusi sõlmedes ehk $y(x_i)$ väärtusi, mida tähistame lühidalt y_i , $i = 0, \dots, N$. Moodustame toodud sõlmedes võrrandite süsteemi

$$f(x_i, y(x_i), y'(x_i), \dots, y^{(n)}(x_i)) = 0, \quad i = k_1, k_1 + 1, \dots, k_2, \quad (6.3)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{kj} y^{(j)}(x_0) + \beta_{kj} y^{(j)}(x_N)) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.4)$$

kus täisarvud k_1 ja k_2 valitakse nii, et otsitavate väärtuste (tundmatud y_i) arv võrduks võrrandite arvuga (sageli $k_1 = 1, k_2 = N - 1$). Järgnevalt asendame tekkinud süsteemis (6.3)-(6.4) tuletiste väärtused vastavate numbriliste diferentseerimise valemitega.

Tuletiste ligikaudseks leidmiseks kasutatakse kõige sagedamini järgmisi sümmeetrilisi valemeid

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} - \frac{h^2}{6} y^{(3)}(\xi), \quad (6.5)$$

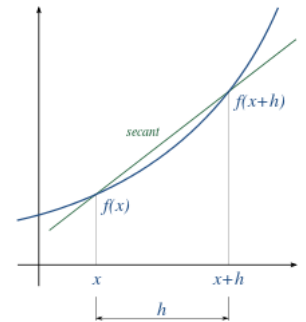
$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi), \quad (6.6)$$

$$y^{(3)}(x_i) = \frac{y(x_{i+2}) - 2y(x_{i+1}) + 2y(x_{i-1}) - y(x_{i-2}))}{2h^3} + \theta_3 h^2 y^{(5)}(\xi), \quad (6.7)$$

$$y^{(4)}(x_i) = \frac{y(x_{i+2}) - 4y(x_{i+1}) + 6y(x_i) - 4y(x_{i-1}) + y(x_{i-2}))}{h^4} + \theta_4 h^2 y^{(6)}(\xi). \quad (6.8)$$

Jättes jääkliikmed ära, saame järgmised seosed:

$$\begin{aligned} y'(x_i) &\approx \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}), \\ y''(x_i) &\approx \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}), \\ y^{(3)}(x_i) &\approx \frac{1}{2h^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}), \\ y^{(4)}(x_i) &\approx \frac{1}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}). \end{aligned} \quad (6.9)$$



Siin ξ asub valemite esinevate sõlmede vahel ning jääkliikude on tõkestatud, kui vastav tuletis on vaadeldavas piirkonnas tõkestatud ja läheneb siis protsessis $h \rightarrow 0$ nullile.

Antud valemite kasutamisel peab olema ettevaatlik, kui sõlmed x_i jäävad vaadeldud lõigust $[a, b]$ väljapoole (näiteks rajatingimuste korral). Sel juhul sõltub olukorra lahendus ka sellest, kas lahend on loomulikult jätkatav väljapoole piirkonda $[a, b]$ või mitte.

Mittesümmeetrilised diferentsvalemid:

$$\begin{aligned}
 y'(a) &= \frac{1}{h}(y_1 - y_0) - \frac{h}{2}y''(\xi), \\
 y'(a) &= \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}y^{(3)}(\xi), \\
 y'(b) &= \frac{1}{h}(y_N - y_{N-1}) + \frac{h}{2}y''(\xi), \\
 y'(b) &= \frac{1}{2h}(3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}) + \frac{h^2}{3}y^{(3)}(\xi).
 \end{aligned}
 \tag{6.10}$$

Märkus 6.1

Pärast tehtud asendusi võrrandites (6.3)-(6.4) oleme saanud võrrandite süsteemi tundmatute y_i leidmiseks. Seoses diferentsmeetoditega kerkib kolm põhiprobleemi:

1. algebraise võrrandisüsteemi koostamine,
2. algebraise võrrandisüsteemi lahendamine,
3. tulemuse täpsuse hindamine.

Järgnevates peatükkides me vaatleme enamasti teist järku lineaarset rajaülesannet. Mittelineaarsete võrrandite korral käib meetod üsna sarnaselt, ainult et sel korral on algebraise võrrandisüsteemi lahendamine oluliselt keerulisem.

6.2 Näiteid lineaarsete võrrandite kohta

Näide 6.1 Vaatleme võrrandit

$$y'' = 4y$$

rajatingimustega

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

Kirjutame võrrandi välja sõlmes x_i :

$$y''(x_i) = 4y(x_i).$$

Kasutades teise tuletise jaoks valemit (6.9) teist avaldist, saame

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 4y_i = 0,$$

ehk

$$y_{i-1} + (-4h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = 0.$$

Võtame näiteks 4 osalõiku ($N = 4$). Sel juhul $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Otsitavateks suurusteks on y_1, y_2 ja y_3 , kuna y_0 ning y_4 on rajatingimustest juba teada.

Kirjutame välja võrrandite süsteemi $i = 1, 2, 3$ korral,

$$\begin{cases} y_0 + (-4h^2 - 2)y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + (-4h^2 - 2)y_2 + y_3 = 0 \\ y_2 + (-4h^2 - 2)y_3 + y_4 = 0 \end{cases}.$$

Arvestades rajatingimusi $y_0 = 1$ ja $y_4 = 3$, saame järgmise lineaarvõrrandite süsteemi:

$$\begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{9}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Viimast süsteemi on juba lihtne Gaussi elimineerimisega leida, kuid arvuti abil saab veelgi kiiremini. Võrrandi täpseks lahendiks on lineaarne kombinatsioon funktsioonidest e^{2x} ja e^{-2x} ehk $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. Võrdluseks toome tabeli leitud lähisväärtuste ja täpsete väärtuste vahel:

i	x_i	y_i	$y(x_i)$
0	0.00	1.0000	1.0000
1	0.25	1.0249	1.0181
2	0.50	1.3061	1.2961
3	0.75	1.9138	1.9049
4	1.00	3.0000	3.0000

Kui me tahame täpsust suurendada, peame võtma rohkem osalõike. Üldjuhul saaksime siis kolme peadiagonaaliga maatriksiga lineaarvõrrandite süsteemi

$$\begin{pmatrix} -4h^2 - 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -4h^2 - 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -4h^2 - 2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -4h^2 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

Näide 6.2 Vaatleme võrrandit

$$y'' - xy' + (x - 1)y = 0$$

rajatingimustega

$$y'(0) - y(0) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

Kirjutame võrrandi välja sõlmes x_i :

$$y''(x_i) - x_i y'(x_i) + (x_i - 1)y(x_i) = 0.$$

Kasutades teise ja esimese tuletise jaoks vastavalt valemi (6.9) teist ja esimest avaldist, saame

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{x_i}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + (x_i - 1)y_i = 0,$$

ehk

$$\left(1 + \frac{hx_i}{2}\right) y_{i-1} + (h^2(x_i - 1) - 2)y_i + \left(1 - \frac{hx_i}{2}\right) y_{i+1} = 0.$$

Võtame näiteks 2 osalõiku ($N = 2$). Sel juhul $h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$. Otsitavateks suurusteks on y_0, y_1 ja y_2 . Kirjutame eelmise võrrandi välja $i = 0, 1, 2$ korral (siis $x_0 = 0, x_1 = 1/2, x_2 = 1$). Saame lineaarvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} 4y_{-1} - 9y_0 + 4y_1 = 0 \\ 9y_0 - 17y_1 + 7y_2 = 0 \\ 5y_1 - 8y_2 + 3y_3 = 0 \end{cases}.$$

Järgenvolt tuleb tegeleda rajatingimustega. Kasutades sümmeetrilist valemit $y'(x_i) = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})$, saame rajatingimustest $y'(0) - y(0) = 1$ ja $y'(1) = 0$ lisaks võrrandid

$$\frac{1}{2h}(y_1 - y_{-1}) - y_0 = 1, \quad y_3 - y_1 = 0.$$

Arvestades, et $h = 1/2$, saame avaldada lõigust $[0, 1]$ välja minevad suurused y_{-1} ja y_3 :

$$y_{-1} = y_1 - y_0 - 1, \quad y_3 = y_1.$$

Oleme saanud viis võrrandit viie tundmatu $y_{-1}, y_0, y_1, y_2, y_3$ leidmiseks. Asendades y_{-1} ja y_3 , saame järgmise kolme võrrandi ja kolme tundmatuga lineaarvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} -13y_0 + 8y_1 = 4 \\ 9y_0 - 17y_1 + 7y_2 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \end{cases},$$

ehk

$$\begin{pmatrix} -13 & 8 & 0 \\ 9 & -17 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mille lahenditeks on $y_0 \approx -0.6897$, $y_1 \approx -0.6207$ ja $y_2 \approx -0.6207$.

Tuleme tagasi oma rajatingimuste asendamiste juurde. Seekord kasutame sümmeetriliste valemite asemel mittesümmeetrilisi valemeid (6.10):

$$\frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) - y_0 = 1, \quad 3y_2 - 4y_1 + y_0 = 0.$$

Koos algvõrrandi välja kirjutamisega punktis x_1 jõuame lineaarvõrrandite süsteemini

$$\begin{cases} -4y_0 + 4y_1 - y_2 = 1 \\ 9y_0 - 17y_1 + 7y_2 = 0 \\ y_0 - 4y_1 + 3y_2 = 0 \end{cases},$$

ehk

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 9 & -17 & 7 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mille lahenditeks on $y_0 \approx -0.7419$, $y_1 \approx -0.6454$ ja $y_2 \approx -0.6129$. Tulemuste suur erinevus viitab nende väikesele täpsusele. Järelikult peaksime paremate tulemuste saamiseks kasutama väiksemat sammupikkust h .

◇ ◇ ◇

6.3 Mittelineaarsed võrrandid

Näide 6.3 Vaatleme võrrandit

$$y'' = y - y^2$$

rajatingimustega

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 4.$$

Kirjutame võrrandi välja sõlmes x_i :

$$y''(x_i) = y(x_i) - y^2(x_i).$$

Kasutades teise tuletise jaoks valemit (6.9) teist avaldist, saame

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i + y_i^2 = 0,$$

ehk

$$y_{i-1} - (2 + h^2)y_i + h^2y_i^2 + y_{i+1} = 0.$$

Võtame näiteks 4 osalõiku ($N = 4$). Sel juhul $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Otsitavateks suurus-
teksteks on y_1, y_2 ja y_3 , kuna y_0 ning y_4 on rajatingimustest juba teada.

Kirjutame välja võrrandite süsteemi $i = 1, 2, 3$ korral,

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 - (2 + h^2)y_1 + h^2y_1^2 + y_2 = 0 \\ y_1 - (2 + h^2)y_2 + h^2y_2^2 + y_3 = 0 \\ y_2 - (2 + h^2)y_3 + h^2y_3^2 + y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Toodud süsteemi aga kahjuks enam nii kergesti ei õnnestu lahendada. Siin peaks kasutama teatavaid iteratsioonimeetodeid nagu näiteks Newtoni meetodit vektorite jaoks. Me lahendame sel korral võrrandit $F(\vec{z}) = \vec{0}$, kus funktsioon F on defineeritud vektorfunktsioonina

$$F \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 - \frac{33}{16}y_1 + \frac{1}{16}y_1^2 + y_2 \\ y_1 - \frac{33}{16}y_2 + \frac{1}{16}y_2^2 + y_3 \\ y_2 - \frac{33}{16}y_3 + \frac{1}{16}y_3^2 + 4 \end{pmatrix}.$$

Kasutades järgnevat Newtoni iteratsiooni algühendiga $y^0 = (1, 1, 1)^T$ ja 20 iteratsiooni, saame lahenditeks $y_1 \approx 2.430$, $y_2 \approx 3.643$, $y_3 \approx 4.254$.

◇ ◇ ◇

6.4 Newtoni meetod mitmemõõtmelisel juhul

Mitmemõõtmelisel juhul tuleb Newtoni meetodi jaoks leida funktsiooni F Jacobi maatriks DF . Jacobi maatriks on skalaarse ühemuutuja funktsiooni tuletise üldistus vektorfunktsioonile.

$$DF(y) = D \begin{pmatrix} f_1(y) \\ f_2(y) \\ f_3(y) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(y) & \frac{\partial f_1}{\partial y_3}(y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(y) & \frac{\partial f_2}{\partial y_3}(y) \\ \frac{\partial f_3}{\partial y_1}(y) & \frac{\partial f_3}{\partial y_2}(y) & \frac{\partial f_3}{\partial y_3}(y) \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

Seega viimase näite jaoks

$$DF(y) = \begin{pmatrix} -\frac{33}{16} + \frac{2}{16}y_1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{33}{16} + \frac{2}{16}y_2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{33}{16} + \frac{2}{16}y_3 \end{pmatrix}$$

Andes ette alglähendi y^0 , saab Newtoni meetodi kirja panna iteratsioonina:

$$y^{k+1} = y^k - [DF(y^k)]^{-1} F(y^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

Kuna pöördmaatriksi leidmine on ajaliselt väga kulukas, siis kasutatakse otsese Newtoni meetodi asemel järgmist lineaarvõrrandisüsteemi $Az = b$ tundmatu z suhtes:

$$\begin{aligned} DF(y^k)z &= -F(y^k) \\ y^{k+1} &= y^k + z, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.13)$$

Näide 6.4 Vaatleme võrrandit

$$y'' = y' + \cos(y)$$

rajatingimustega

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

Kirjutame võrrandi välja sõlmes x_i :

$$y''(x_i) = y'(x_i) + \cos(y(x_i))$$

Asendame tuletised:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - \cos(y_i) = 0,$$

ehk

$$\left(1 + \frac{h}{2}\right) y_{i-1} - 2y_i + \left(1 - \frac{h}{2}\right) y_{i+1} - h^2 \cos(y_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Võtame näiteks N osalõiku.

Kirjutame välja võrrandisüsteemi koos esimese ja viimase võrrandiga, milles on asendatud $y_0 = 0$ ja $y_N = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2y_1 + \left(1 - \frac{h}{2}\right)y_2 - h^2 \cos(y_1) = 0 \\ \vdots \\ \left(1 + \frac{h}{2}\right)y_{i-1} - 2y_i + \left(1 - \frac{h}{2}\right)y_{i+1} - h^2 \cos(y_i) = 0 \\ \vdots \\ \left(1 + \frac{h}{2}\right)y_{N-2} - 2y_{N-1} + \left(1 - \frac{h}{2}\right) - h^2 \cos(y_{N-1}) = 0 \end{array} \right\}.$$

Vastava süsteemi Jacobi maatriks $DF(y)$ on kirja pandav kujul

$$\begin{pmatrix} -2 + h^2 \sin(y_1) & 1 - h/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 + h/2 & -2 + h^2 \sin(y_2) & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 1 + h/2 & \ddots & 1 - h/2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 + h^2 \sin(y_{N-2}) & 1 - h/2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 + h/2 & -2 + h^2 \sin(y_{N-1}) \end{pmatrix}.$$

◇ ◇ ◇

6.5 Ligikaudne sammul tekkiv viga

Me kasutasime tuletiste ligikaudseks leidmiseks enamasti teist järku diferentsvalemeid. Teatavatel lisaeldustel saab näidata, et siis ka diferentsmeetodi abil arvutatud lähislahendi y_i viga avaldub kujul

$$y(x_i) - y_i = \Theta h^2 \approx \Theta_0 h^2, \quad i = 0, \dots, N, \quad (6.14)$$

kus Θ on protsessis $h \rightarrow 0$ tõkestatud suurus ja Θ_0 konstant. See võimaldab meil kasutada Runge veahindamise võtet. Arvutame sama meetodi abil sammu $h/2$ abil lahendi $y(x)$ lähisväärtuse kohal x_i , tähistame selle $y_i^{h/2}$. Siis

$$y(x_i) - y_i^{h/2} \approx \Theta_0 \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \Theta_0 \frac{h^2}{4}. \quad (6.15)$$

Lahutame eelmisest seosest viimase ja tähistame täissammuga leitud väärtuse ülaindeksiga h ,

$$y_i^{h/2} - y_i^h = 3\Theta_0 \frac{h^2}{4}. \quad (6.16)$$

Asendades võrrandis (6.16) suuruse $\Theta_0 \frac{h^2}{4}$ võrrandis (6.15) oleva suurusega $y(x_i) - y_i^{h/2}$, saame

$$y(x_i) - y_i^{h/2} \approx \frac{y_i^{h/2} - y_i^h}{3}. \quad (6.17)$$

Saadud seost (6.17) kasutatakse sageli vea ligikudseks hindamiseks ja tulemuste täpsustamiseks.

6.6 Kõrgema täpsusastmega diferentsmeetodid

Eelnevalt esitatud diferentsmeetodite korral lähislahendi viga on tavaliselt ligikaudu võrdeline sammude h ruuduga. Kui selgub, et tulemuste täpsus ei ole küllaldane, siis üheks täpsuse tõstmise vahendiks on sammude h vähendamine (osalõikude arvu N suurendamine). Sammu h vähendamine 10 korda vähendaks viga umbes 100 korda (see annab juurde umbes kaks õiget komakohta), kuid teisalt suurendab see umbes 10 korda nii võrrandite kui tundmatute arvu ja arvutuste maht ning ajakulu suurenevad samuti oluliselt (kusjuures pigem 100 ja rohkem kui 10 korda). seetõttu ei ole praktikas eriti mõistlik minna sammude h vähendamisega liiga kaugemale.

Üks võimalikke lahendusi on kasutada kõrgema täpsusastmega meetodeid, mille korral nii võrrandis kui rajatingimustes olevad tuletised leitakse täpsimate valemitega. Kui näiteks II järku diferentsiaalvõrrandi

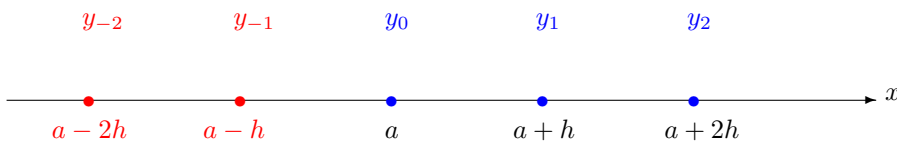
$$y''(x) + q(x)y'(x) - r(x)y(x) = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (6.18)$$

rajaülesande lahend y on 6 korda pidevalt diferentseeruv lõigul $[a, b]$, siis võime selles võrrandis esinevate tuletiste aproksimeerimiseks kasutada järgmisi valemiteid

$$y'(x_i) = \frac{1}{12h}(-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}) + \frac{h^4}{30}y^{(5)}(\xi_i) \quad (6.19)$$

$$y''(x_i) = \frac{1}{12h^2}(-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}) + \frac{h^4}{90}y^{(6)}(\xi'_i) \quad (6.20)$$

kus $y_j = y(x_j)$ ($j = i-2, \dots, i+2$) ja $\xi_i, \xi'_i \in (x_{i-2}, x_{i+2})$. Asendades võrrandis (6.18) tuletised nende valemite paremate pooltega ilma jääkliikmeteta, saavutame juba neljanda astme täpsuse. Enam-vähem sama täpsusega tuleb aproksimeerida ka rajatingimustes esinevaid tuletiste väärtusi.



Sellise meetodi rakendamine on aga tunduvalt komplitseeritum kui hariliku diferentsmeetodi rakendamine. Selleks, et saavutada olukord, kus võrrandite arv võrduks tundmatute arvuga, tuleb tuletiste väärtusi rajapunktides ja nende naaberpunktides aproksimeerida kõrget järku mittesümmeetriliste valemitega.

Näide 6.5 Vaatleme võrrandit

$$y'' = 4y$$

rajatingimustega

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

Kirjutame võrrandi välja sõlmes x_i :

$$y''(x_i) = 4y(x_i).$$

Kasutades teise tuletise jaoks valemit (6.20), saame

$$\frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12h^2} - 4y_i = 0,$$

ehk

$$y_{i-2} - 16y_{i-1} + (30 + 48h^2)y_i - 16y_{i+1} + y_{i+2} = 0.$$

Võtame näiteks 4 osalõiku ($N = 4$). Sel juhul $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Otsitavateks suurusteks on y_1, y_2 ja y_3 , kuna y_0 ning y_4 on rajatingimustest juba teada.

Kirjutame välja võrrandi $i = 2$ korral,

$$y_0 - 16y_1 + 33y_2 - 16y_3 + y_4 = 0.$$

ehk arvestades rajatingimusi, saame

$$-16y_1 + 33y_2 - 16y_3 = -4,$$

Rohkem meil ei õnnestu neljanda astme valemite abil võrrandeid välja kirjutada, ilma et meil iga võrrandi kohta ei tekiks juurde ühte uut tundmatut (näiteks liiget y_{-1} või y_5). Seega on meil üks võrrand ja kolm tundmatut y_1, y_2 ja y_3 . Kuidas sellises olukorras käituda, sellest saab lugeda õpikust [3].

◇ ◇ ◇

6.7 Mitmepunktimeetod

Vaatleme veel ühte lähenemisviisi kõrgemat järku meetodite kasutamiseks.

Olgu meil antud teist järku diferentsiaalvõrrand

$$y''(x) - r(x)y(x) = f(x), \quad (6.21)$$

$$y(a) = \gamma, \quad y(b) = \delta. \quad (6.22)$$

Näiteks sobib sedasorti võrrandi lahendamiseks Adams-Störmeri valem, mis seob tuletiste väärtusi ja funktsiooni väärtuste lineaarkombinatsioone,

$$y''_{i+1} + 10y''_i + y''_{i-1} - \frac{12}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \approx \frac{h^4}{20}y^{(6)}(x_i) \quad (6.23)$$

Nimelt, me saame võrrandist (6.21) avaldada

$$y_i'' = f_i + r_i y_i \quad (6.24)$$

ja seega elimineerida avaldisest (6.23) teised tuletised. Jättes ära jääkliikme, saame

$$\frac{12}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = f_{i+1} + 10f_i + f_{i-1} + r_{i+1}y_{i+1} + 10r_i y_i + r_{i-1}y_{i-1}. \quad (6.25)$$

Jõuame jällegi kolme peadiagonaaliga võrrandisüsteemini

$$A_i y_{i-1} + B_i y_i + C_i y_{i+1} = G_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (6.26)$$

kus konstandid A_i, B_i, C_i ja G_i on antud kui

$$A_i = \frac{12}{h^2} - r_{i-1}, \quad B_i = -\frac{24}{h^2} - 10r_i, \quad C_i = \frac{12}{h^2} - r_{i+1}, \quad G_i = f_{i-1} + 10f_i + f_{i+1}. \quad (6.27)$$

Lisades rajatingimused $y_0 = \gamma$ ja $y_N = \delta$, saame võrrandisüsteemi, mille lahendamine on peaaegu sama lihtne kui hariliku diferentsmeetodi korral, kuid mille abil saavutame tavaliselt tunduvalt suurema täpsuse (viga on võrdeline ligikaudu suurusega h^4).

Näide 6.6 Vaatleme näidet

$$y'' = 4y$$

rajatingimustega

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

Kirjutame võrrandi välja sõlmes x_i :

$$y''(x_i) = 4y(x_i).$$

Kirjutame välja süsteemi (6.26),

$$\left(\frac{12}{h^2} - 4\right) y_{i-1} - \left(\frac{24}{h^2} + 40\right) y_i + \left(\frac{12}{h^2} - 4\right) y_{i+1} = 0.$$

Võtame näiteks 4 osalõiku ($N = 4$). Sel juhul $h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$. Otsitavateks suurusteks on y_1, y_2 ja y_3 , kuna y_0 ning y_4 on rajatingimustest juba teada.

Kirjutame välja võrrandite süsteemi $i = 1, 2, 3$ korral,

$$\left\{ \begin{array}{l} 47y_0 - 106y_1 + 47y_2 = 0 \\ 47y_1 - 106y_2 + 47y_3 = 0 \\ 47y_2 - 106y_3 + 47y_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Arvestades rajatingimusi $y_0 = 1$ ja $y_4 = 3$, saame järgmise lineaarvõrrandite süsteemi:

$$\begin{pmatrix} -106 & 47 & 0 \\ 47 & -106 & 47 \\ 0 & 47 & -106 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 \\ 0 \\ -141 \end{pmatrix}.$$

Võrdluseks toome tabeli leitud lähisväärtuste ja täpsete väärtuste vahel, lisame siia juurde hariliku diferentsmeetodiga saadud lahendid:

i	x_i	harilik dif. m. y_i	Adams-Störmer y_i	täpne $y(x_i)$
0	0.00	1.0000	1.0000	1.0000
1	0.25	1.0249	1.0180	1.0181
2	0.50	1.3061	1.2960	1.2961
3	0.75	1.9138	1.9048	1.9049
4	1.00	3.0000	3.0000	3.0000

Tulemus on täpne koguni kolm komakohta, maksimaalne viga on 0.0001.

◇ ◇ ◇

6.8 Kolme peadiagonaaliga võrrandisüsteemi lahendamine

Küllaltki sageli tuleb rakendustes lahendada suuri võrrandisüsteeme, mille maatriksis esineb palju nulle. Real juhtudel on selliste süsteemide lahendamisel võimalik Gaussi elimineerimismeetodi algoritmi oluliselt lihtsustada.

Kolmediagonaalse maatriksiga võrrandisüsteem on süsteem, milles kordajate maatriksi A liikmed a_{ij} võrduvad nulliga, kui $|i - j| > 1$. Muutes kordajate ja vabaliikmete tähistusi, kirjutame selle süsteemi kujul

$$a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 0, \dots, N, \quad (6.28)$$

milles loeme, et $a_0 = c_N = 0$. Kirjutame süsteemi ka täpsemalt välja:

$$\begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-2} & b_{N-2} & c_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_N & b_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Rakendades Gaussi meetodit, teisendame selle süsteemi maatriksis allpool peadiagonaali asuvad elemendid nullideks. Sel juhul saame

$$x_i = d_i x_{i+1} + F_i, \quad i = N, N-1, \dots, 1, 0, \quad (6.30)$$

kus

$$d_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i d_{i-1}}, \quad F_i = \frac{f_i - a_i F_{i-1}}{b_i + a_i d_{i-1}}, \quad i = 0, \dots, N. \quad (6.31)$$

Saime selle süsteemi pärast Gaussi meetodi kasutamist:

$$\begin{pmatrix} 1 & -d_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -d_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -d_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -d_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -d_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-2} \\ F_{N-1} \\ F_N \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

märgime, et valemite (6.30) ja (6.31) põhjal saame lahendada võrrandisüsteemi (6.28), sooritades kokku $5N$ korrutamist ja jagamist, mis suure N korral on oluliselt väiksem Gaussi meetodiga üldise võrrandisüsteemi $Ax = F$ lahendamiseks vajalikust korrutamiste ja jagamiste ligukaudsest arvust $N^3/3$. see võimaldab lahendada väikese aja- ja mälukuluga võrrandisüsteemi, millel on sadu tuhandeid ja rohkem võrrandeid.

Märkus 6.2

Võrrandisüsteemi (6.28) determinant avaldub kujul

$$\det A = \prod_{i=0}^N (b_i + a_i d_{i-1}). \quad (6.33)$$

Siit näeme, et valemite (6.31) rakendamisel ei teki nulliga jagamist parajasti siis, kui $\det A \neq 0$.

Lause 6.1

[4] Kui

$$|a_i| + |c_i| \leq |b_i| \quad \text{ja} \quad |c_i| < |b_i|, \quad i = 0, \dots, N,$$

siis on võrrandisüsteem (6.28) üheselt lahenduv.

Viited

- [1] J. Janno. Arvutusmeetodid. Tallinna Tehnikaülikool, 2008.
- [2] T. Sauer. Numerical Analysis. 2nd ed. Pearson, 2012.
- [3] E. Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.
- [4] E. Tamme, L. Vöhandu, L. Luht. Arvutusmeetodid I. Tallinn, 1986.